奥林匹克数学



钱展望 朱华伟／编著

湖北教育出版社

高二分册

OLYMPIC MATHS

金牌教练教你学

奥林匹克数学

高二分册 MATHS

钱展望 朱华伟 编著

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学．高二分册/钱展望，朱华伟主编．—武汉：湖北教育出版社，2002
(奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7-5351-3144-1

Ⅰ．奥… Ⅱ．①钱…②朱… Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011200 号

出版 发行：湖北教育出版社　　武汉市青年路 277 号
网址：http://www.hbedup.com　　邮编：430015　传真：027-83619605
邮购电话：027-83669149

经　销：新　华　书　店
印　刷：湖北新华印务有限公司　　(430034·武汉市解放大道 145 号)
开　本：850mm×1168mm　1/32　　11.75 印张
版　次：2002 年 3 月第 1 版　　2002 年 3 月第 1 次印刷
字　数：286 千字　　印数：1-8 000

ISBN 7-5351-3144-1/G·2550　　定价：14.00 元

前言

数学是人类理性文明高度的结晶，数学文化是人类文明的重要组成部分。中国和其他文明古国都曾为古代的数学文化做出过不可磨灭的贡献。数学对近代及现代科学技术与生产力的迅速发展起了重要的推动作用。过去三百年中，物理学中的自然界的基本规律都是用数学表述的。近代科学技术新纪元的开辟者牛顿曾将他毕生最重要的著作命名为《自然哲学的数学原理》。20世纪最伟大的科学家爱因斯坦在他的自述文章中也一再谈到数学对他的成长和对他毕生成就的根本影响。随着科学技术的发展，电子计算机的发明和发展，数学不仅是整个自然科学的基础，同时也是工程科学和技术、信息科学和技术、经济科学、管理科学乃至某些人文科学必不可少的工具。提高人才的数学素质已成为一项迫在眉睫的重要任务。

世界上第一次真正有组织的数学竞赛始于匈牙利数学竞赛（1894年）。一个多世纪的数学奥林匹克活动的实践和研究证明，科学合理地举办各级数学奥林匹克活动，对于传播数学思想方法，激发学生学习数学的兴趣，培养学生的创新精神，提高学生的数学素养、思维能力、促进数学教师素质的提高和数学教育改革，发展和选拔优秀人才等都是十分有益的。

如何更为科学、合理、有效地开展数学奥林匹克培训活动，是我们数学教育工作者所面临的一个重要课题。建设科学、实用的培训教材则是这一课题取得进展的一大关键，是提高教学效益、提高教学质量的基本保证。作为一种尝试，本套书以笔者多年亲自培训数学奥林匹克选手积累的经验为基础，以众多的国内外数学奥林匹克文献为源泉，根据现行中学数学教学大纲，按年级分为初一分册、初二分册、初三分册、高一分册、高二分册、高三分册、方法与研究分册进行编写。它融奥林匹克数学的理论、方法与应用为一体，

充分考虑到日常课堂学习、各级数学竞赛的不同要求，以知识点为主线，尽量做到与课堂教学同步，由浅入深，由课内到课外逐步引申扩充，十分便利学生自学。

数学离不开解题。问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，练习是必不可少的。在本套书中，还专门为初一至高二各年级配备了训练题集，用作自我测试与评估。本套书所选例、习题中，既有传统的佳题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题，其中有相当一部分对帮助参加中、高考学生解答中、高考试卷中对能力要求较高的问题大有帮助，相信读者通过对这些问题的研讨、解答，会受益匪浅。

有必要指出的是，本书还有助于帮助读者破除对数学奥林匹克的神秘感，发现开发自己身上存在的巨大潜能，以增进自信，从而进一步大胆主动地去领略数学风采，探索数学世界奥秘。

本套书可供中等及中等以上程度的学生自学用，也可作为数学奥林匹克活动的指导参考书。

钱展望　朱华伟

2002年1月



钱展望 中学数学特级教师，湖北省数学学会理事，武汉市中学数学教研会副会长，中国数学奥林匹克高级教练，全国教育系统劳动模范，全国“五一”劳动奖章获得者，武汉市首届教育界十位名师之一，享受国务院政府特殊津贴。

多年来坚持因材施教，积极探索发展学生个性特长、优化学生思维品质的中学数学教育新路，成绩斐然，所辅导的武钢三中学生中，周彤等多人在国际数学奥林匹克中获金牌，先后有十数人入选国际中学生数学奥林匹克中国代表队。参与撰写了《中国著名特级教师教学思想录》（国家教委负责组织、柳斌主编，获第三届国家图书奖），论文《数学教学中优化学生思维品质的做法》、《关于数学教学的启发思考》，分别获得武汉市首届和第三届教育科研优秀成果一等奖，前者在中国教育学会成立十周年优秀论文评选中获奖，此外还撰写有《数学奥林匹克》高中知识篇、小学提高篇（北京大学出版社），主编《走向成功》高一数学、高二数学等书。



朱华伟 博士研究生，特级教师，美国洛杉矶加州州立大学访问学者，中国数学奥林匹克高级教练，湖北省十大杰出青年，首届湖北青年五四奖章获得者，湖北省有突出贡献的中青年专家，湖北省教育科研学术带头人，享受国务院政府特殊津贴，《华罗庚少年数学》编委，《中学数学》编委。

1993年任第33届国际数学奥林匹克中国队教练，1994年任全国高中数学联赛命题组成员，1996年任汉城国际数学竞赛中国队主教练，取得团体冠军和两枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的佳绩，连续任第四届、第五届、第六届、第七届全国华罗庚金杯赛武汉队主教练，获全国华罗庚金杯赛金牌教练奖和伯乐奖，2001年任第42届国际数学奥林匹克中国队教练。

发表论文40余篇，翻译、编著图书40余本，论文《数学奥林匹克对选手的能力要求》被评为全国中学数学期刊优秀论文，专著《奥林匹克数学教程》获武汉市教育学会优秀专著一等奖，在国家数学竞赛世界联盟第三次会议上交流。VCD教学录像《特级教师指导学习》获全国教育电视节目特别奖。



目录

第一讲　数列　数学归纳法

知识点和方法述要

1.(1) 数列是按一定次序排列的一列数.

(2) 数列可以看作是定义在自然数集(或它的有限集)上的函数.当自变量依次取从小到大的自然数时,相应的一系列函数值就形成了数列.数列$\{a_n\}$的通项公式是第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系式,即 a_n 可以表示为 $a_n=f(n)$,应当提醒的是.并非每一个数列都可以写出它的通项公式.数列的图象是一系列不连续的点$(n, f(n))$所组成的图形.

(3) 数列$\{a_n\}$的前 n 项的和用 S_n 表示,即 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

(4) $a_n=\begin{cases}S_1 & n=1,\\ S_n-S_{n-1} & n\geqslant 2.\end{cases}$

(5) 项数有限的数列叫有穷数列,项数是无限的数列叫无穷数列.如果两个数 A,B(设 $A\leqslant B$),使数列$\{a_n\}$的每一项都有 $A\leqslant a_n\leqslant B$,那么叫数列$\{a_n\}$为有界数列,$A$ 叫做下界,B 叫做上界.否则数列$\{a_n\}$为无界数列.

(6) 求数列前 n 项的和常采用拆项求和、错项相消等方法.

(7) 常用数列的前 n 项求和公式

(ⅰ) $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

(ⅱ) $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$;

(ⅲ) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(ⅳ) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2.数学归纳法,是论证与自然数 n 有关命题的一种常用方法,

应用十分广泛.

(1) 数学归纳法的理论依据是数学归纳原理：设 $P(n)$是关于自然数 n 的一个命题，如果(ⅰ)$P(1)$真；(ⅱ)由 $P(k)$为真的假设可推出 $P(k+1)$为真，那么 $P(n)$对一切自然数 n 为真.

数学归纳法的一般步骤：第一步，证明 $n=n_0$ 时命题为真；第二步，假设当 $n=k$ 时命题为真，证明当 $n=k+1$ 时命题也为真. 完成了这两步证明，即可断定命题对一切自然数 $n(n\geqslant n_0)$为真. 在这两个步骤中，第一步是奠基步，第二步是归纳步.

(2) 完成数学归纳法，两个步骤缺一不可. 比较而言，使我们陷入困境的步骤多数是递推步. 这一步的完成，首要的是善于因势利导，由"$k+1$"退到"k". 常用撤出某个特殊对象、合并某些对象、分类处理、逐步化归等手段.

(3) 起始步的功能除了是归纳不可缺少的一个环节外，而且起始值和简单情形的验证，对递推步的解决常可起到重要启示和铺垫作用.

(4) 用数学归纳法证明的命题主要源于不完全归纳、先猜后证，一般地经历探索——归纳——猜想——证明的过程. 命题解决的全过程始于猜想. 这种猜想不是胡思乱想，而是对特例进行深入观察、思考，探索其中规律，然后大胆地提出猜想.

例 题 精 讲

例 1 设数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\left(\frac{994}{995}\right)^n(n^2+995)(n\in\mathrm{N})$$

试求$\{a_n\}$的最大值项.

解
$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\left(\frac{994}{995}\right)^n\left[\frac{994}{995}(n^2+2n+1+994)-(n^2+994)\right]\\&=\left(\frac{994}{995}\right)^n\frac{1}{995}(2\times 994n-n^2)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{995}\left(\frac{994}{995}\right)^{n}\left[-(n-994)^{2}+994^{2}\right].$$

令 $\psi(n)=a_{n+1}-a_{n}$，则当 $1\leqslant n\leqslant 2\times 994-1=1987$ 时，$\psi(n)>0$，即 $a_{n+1}>a_{n}$，有

$$a_{1}<a_{2}<\cdots<a_{1987}<a_{1988};$$

当 $n\geqslant 2\times 994+1=1989$ 时，$\psi(n)<0$，即 $a_{n+1}<a_{n}$，有

$$a_{1989}>a_{1990}>\cdots.$$

当 $n=2\times 994=1988$ 时，$\psi(n)=0$，$a_{1989}=a_{1988}$. 故 $\{a_{n}\}$ 的最大项是 a_{1988} 与 a_{1989} 两项.

例 2 设围棋盘的标号如图 1-1. 试问：

(1) 第一行中自左至右的第 9 列是第几号？

(2) 自上至下第 4 行中，自左至右的第 5 列是第几号？

(3) 第 100 号的位置在哪一格？

1	2	4	7	11	16	22		
3	5	8	12	17				
6	9	13	18					
10	14	19						
15	20							
21								

图 1-1

解 格子里的标号形成自然数数列 1，2，…，n，…，按斜对角线上的元素为一组，可构成分群数列，记作

(1)，(2,3)，(4,5,6)，(7,8,9,10)，(11，…)，…

显然，在第 n 个群中有 n 个元素，且第 n 群中的第一个元素是第一行中自左至右的第 n 列的标号.

(1) 因为自第一群到第 n 群共有元素

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}(\text{个}).$$

因此第 n 群中的第一个元素是原数列中的

$$\frac{n(n-1)}{2}+1=\frac{n^{2}-n+2}{2}(\text{项}).$$

第一行中自左至右的第 9 列，是第 9 群中的第一个元素，因此这

个元素是原数列中的

$$\frac{9^2-9+2}{2}=37(\text{项}).$$

即 37 号.

(2) 第 m 行中第 n 列的格子在第$(n+m-1)$条斜对角线上，因此这个格子属第$(n+m-1)$群. 于是自上至下第 4 行中，自左至右的第 5 列格子在第 8 群中，而第 8 群的第一个元素的标号是$\frac{8^2-8+2}{2}=29$，第 8 群中自上至下第 4 行格子标号为 $29+4-1=32$，故所求标号为 32.

(3) 设第 100 号在第 n 群，那么$\frac{n(n+1)}{2}\geqslant 100$，解之得 $n\geqslant 14$.

因为第 14 群中的最初一个元素是

$$\frac{14^2-14+2}{2}=92,$$

故 100 号位于自上至下的第 9 行，自左至右的第 6 列.

例 3 求证

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

证明 (ⅰ)当 $n=1$ 时，左边 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，右边 $=\frac{1}{2}$，等式成立.

(ⅱ)假设 $n=k(k\in\mathbf{N})$时等式成立，即

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$$
$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k},$$

那么 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$$

$$=\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2(k+1)},$$

当 $n=k+1$ 时等式成立.

综合(ⅰ)、(ⅱ),可知对一切自然数等式成立.

例 4 设 $|\theta|<\frac{\pi}{2}$,数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}\tan^n\theta$. 记 $S_{2n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$.

(1) 求证:对任何自然数 n,

$$S_{2n}=\frac{1}{2}\sin2\theta\cdot[1+(-1)^{n+1}\tan^{2n}\theta];$$

(2) 求证:当 $n\geqslant2$ 时

$$a_n^2+a_{n-1}a_{n+1}+(-1)^n(a_1^n)^2=0.$$

证明 首先,易知 $a_{2n}=0(n=1,2,\cdots)$.

(1) 当 $n=1$ 时,

$$S_2=a_1+a_2=a_1=\sin\frac{\pi}{2}\tan\theta=\tan\theta,$$

$$\frac{1}{2}\sin2\theta\cdot[1+(-1)^{n+1}\tan^2\theta]$$

$$=\frac{1}{2}\sin2\theta\cdot(1+\tan^2\theta)=\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$=\tan\theta.$$

故 $n=1$ 时,命题成立.

假设 $n=k$ 时命题成立,即

$$S_{2k}=\frac{1}{2}\sin2\theta[1+(-1)^{k+1}\tan^{2k}\theta],$$

于是 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}S_{2(k+1)}&=S_{2k}+a_{2k+1}+a_{2k+2}\\&=S_{2k}+a_{2k+1}\\&=\frac{1}{2}\sin2\theta[1+(-1)^{k+1}\tan^{2k}\theta]+\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}\tan^{2k+1}\theta\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta[1+(-1)^{k+1}\tan^{2k}\theta]+(-1)^{k}\tan^{2k+1}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta[1+(-1)^{k+1}\tan^{2k}\theta+(-1)^{k}\cdot\frac{2}{\sin 2\theta}\tan^{2k+1}\theta]$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta\{1+(-1)^{k+2}\cdot\tan^{2k}\theta[-1+\frac{2}{2\sin\theta\cdot\cos\theta}\cdot\tan\theta]\}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta[1+(-1)^{k+2}\cdot\tan^{2k+2}\theta].$$

即当 $n=k+1$ 时命题成立.

综上所述,对任意自然数 n 命题成立.

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$a_n^2+a_{n-1}a_{n+1}+(-1)^n(a_1^n)^2$$

$$=(\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\tan^n\theta)^2+\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\tan^{n-1}\theta\cdot\sin\frac{(n+1)\pi}{2}\tan^{n+1}\theta$$

$$+(-1)^n\tan^{2n}\theta$$

$$=\tan^{2n}\theta[\sin^2\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}+(-1)^n]$$

$$=\tan^{2n}\theta[-\cos n\pi+(-1)^n]$$

$$=\tan^{2n}\theta[-(-1)^n+(-1)^n]=0.$$

例 5 是否存在常数 a、b、c 使得等式

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$$

对于一切自然数 n 都成立? 证明你的结论.

分析一 若存在常数 a,b,c 使题设等式对一切自然数 n 都成立,则令 $n=1,2,3$ 可得

$$\begin{cases}4=\frac{1}{6}(a+b+c),\\22=\frac{1}{2}(4a+2b+c),\\70=9a+3b+c,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a+b+c=24, \\ 4a+2b+c=44, \\ 9a+3b+c=70. \end{cases}$$

解此方程组,得 $a=3,b=11,c=10$.这就是说,当且仅当 $a=3,b=11,c=10$ 时,题设的等式在 $n=1,2,3$ 时成立.假设当 $a=3,b=11,c=10$ 时,题设等式在 $n=k$ 时成立,即

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+k\cdot(k+1)^2=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10),$$

那么,

$$\begin{aligned} & 1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+k\cdot(k+1)^2+(k+1)(k+2)^2 \\ = & \frac{(k+1)(k+2)}{12}[k(3k+5)+12k+24] \\ = & \frac{(k+1)(k+2)}{12}(3k^2+17k+24) \\ = & \frac{(k+1)(k+2)}{12}[3(k+1)^2+11(k+1)+10], \end{aligned}$$

当 $a=3,b=11,c=10$ 时题设等式在 $n=k+1$ 时也成立.

综上所述 $a=3,b=11,c=10$ 为所求.

分析二 $k(k+1)^2=k^3+2k^2+k$,故

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}k(k+1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}k^3+2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10) \end{aligned}$$

$a=3,b=11,c=10$ 即为所求.

例 6 在各项为正的数列$\{a_n\}$中,$S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})(n\in\mathrm{N})$,试求数列 a_n 的通项公式.

分析一 依题设,有

$$a_1=S_1=\frac{1}{2}(a_1+\frac{1}{a_1}),$$

即 $a_1=\frac{1}{a_1}$，注意到 $a_1>0$，故 $a_1=1$，又

$$a_1+a_2=S_2=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right),$$

即

$$a_2^2+2a_2-1=0,$$

解得 $a_2=\pm\sqrt{2}-1$，因 $a_2>0$，故 $a_2=\sqrt{2}-1$.

继续进行下去，可得 $a_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$a_4=\sqrt{4}-\sqrt{3}$.

由上面的计算我们猜想：

$$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\,(n\in \mathrm{N}).$$

以下用数学归纳法证明．$n=1$ 时猜想显然成立．假设 $n=k$ 时，$a_k=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$，由

$$S_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}}\right),$$

及

$$\begin{aligned}S_{k-1}&=S_k+a_{k+1}\\&=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)+a_{k+1},\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)+a_{k+1},\end{aligned}$$

即

$$a_{k-1}-\frac{1}{a_{k+1}}=-\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right).$$

因

$$a_k+\frac{1}{a_k}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}+\frac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}=2\sqrt{k},$$

故

$$a_{k+1}-\frac{1}{a_{k+1}}=-2\sqrt{k}.$$

即

$$a_{k+1}^2+2\sqrt{k}a_{k+1}-1=0.$$

因 $a_{k+1}>0$.所以

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=-\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\\&=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}.\end{aligned}$$

当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$成立.

综上所述，对一切自然数 n 都有

$$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}.$$

说明 本题并未指明必须用数学归纳法，因此可用 $a_n=S_n-S_{n-1}$，把 $S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$换为

$$2S_n=S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}},$$

化简得 $S_n^2=S_{n-1}^2+1$，然后利用累加的方法计算出 $S_n^2=n$，进而求出

$$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}.$$

分析二 利用 $k\geqslant2$ 时有

$$a_k=S_k-S_{k-1},$$

及题设 $$S_k=\frac{1}{2}(a_k+\frac{1}{a_k}),$$

可得 $$2S_k=S_k-S_{k-1}+\frac{1}{S_k-S_{k-1}},$$

化简得 $$S_k^2-S_{k-1}^2=1,$$

于是 $$\sum_{k=2}^{n}(S_k^2-S_{k-1}^2)=n-1,$$

即 $$S_n^2-S_1^2=n-1.$$

又 $$S_1=\frac{1}{2}(a_1+\frac{1}{a_1})=\frac{1}{2}(S_1+\frac{1}{S_1}),$$

可得 $S_1=\frac{1}{S_1}$,注意到 $S_1=a_1$,故 $S_1=1$. 于是 $S_n^2=n$. 因 $S_n>0$,故 $S_n=\sqrt{n}$. 进而有 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\geqslant 2)$. $n=1$ 时上式也成立. 所以 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$为所求.

例 7 设每个正整数在正整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$恰好出现一次,且

$$1+a_1<2+a_2<\cdots<n+a_n<\cdots$$

求证:对每个正整数 n, $a_n=n$.

证一 若 $a_1>1$,设 $a_i=1(i\geqslant 2)$. 依题设,得

$$2<1+a_1<2+a_2<\cdots<n+a_n<\cdots<i+a_i=i+1,$$

于是在区间(2, $i+1$]中至少有 i 个不同的正整数:$1+a_1,2+a_2,\cdots i+a_i$,但区间(2, $i+1$]中只有 $3,4,\cdots,i+1$ 这 $i-1$ 个正整数,矛盾. 故 $a_1=1$.

假设 $n=k$ 时, $a_n=n$,即 $a_1=1,a_2=2,\cdots,a_k=k$. 易知当 $n>k$ 时, $a_n>k$,于是数列 $a_{k+1}-k,a_{k+2}-k,\cdots,a_{k+i}-k,\cdots$中每个自然数恰好出现一次,且

$$1+a_{k+1}-k<2+a_{k+2}-k<\cdots<i+a_{k+i}-k<\cdots$$

由 $a_1=1$ 知 $a_{k+1}-k=1$,即 $a_{k+1}=k+1$.

综上所述,对一切自然数 n, $a_n=n$.

证二 依题设知数列是递增的. 因

$$n+a_n<(n+1)+a_{n+1},$$

有 $$n+a_n+1\leqslant(n+1)+a_{n+1},$$

即 $a_n\leqslant a_{n+1}$. 从而有 $a_1=1$. 否则,若 $a_i=1$, $i>1$,则 $a_1=a_2=\cdots=a_i=1$,与题设相矛盾. 因此, $a_2=2,a_3=3,\cdots,a_n=n,\cdots$.

例 8 试证:对于任意自然数 n, $n^6-3n^5+6n^4-7n^3+5n^2-2n$ 可被 24 整除.

分析 $n=1$ 时, $n^6-3n^5+6n^4-7n^3+5n^2-2n=0$ 可被 24 整

除，命题成立．

假设 $n=k$ 时命题成立，即 $k^6-3k^5+6k^4-7k^3+5k^2-2k$ 可被 24 整除，则 $n=k+1$ 时，

$$(k+1)^6-3(k+1)^5+6(k+1)^4-7(k+1)^3+5(k+1)^2-2(k+1)$$
$$=(k^6-3k^5+6k^4-7k^3+5k^2-2k)+(6k^5+14k^3+4k).$$

问题归结为证明 $6k^5+14k^3+4k$ 能被 24 整除．我们再次使用数学归纳法．事实上，$k=1$ 时，$6k^5+14k^3+4k=24$ 可被 24 整除．假设 $k=s$ 时，$6s^5+14s^3+4s$ 可被 24 整除．当 $k=s+1$ 时，

$$\begin{aligned}&6k^5+14k^3+4k=6(s+1)^5+14(s+1)^3+4(s+1)\\&=(6s^5+14s^3+4s)+30s^4+60s^3+102s^2+72s+24\\&=(6s^5+14s^3+4s)+24(s^4+2s^3+4s^2+3s+1)+\\&\quad 6(s^4+2s^3+s^2)\\&=(6s^5+14s^3+4s)+24(s^4+2s^3+4s^2+4s^2+3s+1)+\\&\quad 6s^2(s+1)^2.\end{aligned}$$

因 $s(s+1)$ 是偶数，故 $6s^2(s+1)^2$ 是 24 的倍数．因此，$k=s+1$ 时命题成立．

经过二次施行数学归纳法，命题可获证．

例 9 对于任何非空子集 S，令 $\sigma(S)$ 和 $\pi(S)$ 分别表示 S 元素的和与积．证明：

$$\sum\frac{\sigma(S)}{\pi(S)}=(n^2+2n)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(n+1),$$

其中“$\sum$”表示对 $\{1,2,\cdots n\}$ 的一切非空子集求和．

证明 当 $n=1$ 时，显然成立．

设 $n=k$ 时，命题成立，即

$$\sum^{k}\frac{\sigma(S)}{\pi(S)}=(k^2+2k)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(k+1).$$

当 $n=k+1$ 时，$\{1,2,3,\cdots k,k+1\}$ 的非空子集 S 有下列两种情况．

(i) S 不含 $k+1$，这种 S 求和所得结果就是归纳假设的结果，即

$(k^2+2k)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})(k+1)$.

(ii) S 含 $k+1$.设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,k+1\}$,则$\frac{\sigma(S)}{\pi(S)}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{a_1a_2\cdots a_m}+\frac{1}{a_1a_2\cdots a_m}$,

根据归纳假设,上式右边一项求得的和是

$$(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{k})=k+1,$$

左边一项求得的和是

$$\frac{1}{k+1}[(k^2+2k)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})(k+1)],$$

故当 $n=k+1$ 时

$$\sum\frac{\sigma(S)}{\pi(S)}=k^2+4k+2-\frac{1}{k+1}-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})(k+2)$$

$$=(k+1)^2+2(k+1)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1})(k+2)$$

命题成立.

综上所述,命题获证.

练 习 一

一、填空题

1.已知数列的通项公式是 $a_n=\frac{9^n(n+1)}{10^n}(n\in\mathrm{N})$,当 a_n 取最大值时,$n=$________.

2.$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}$的值为________.

3.如果 $T_n=1+2+\cdots+n$,$P_n=\frac{T_2}{T_2-1}\cdot\frac{T_3}{T_3-1}\cdot\frac{T_4}{T_4-1}\cdot\cdots\frac{T_n}{T_n-1}$ $(n=2,3,4\cdots)$,则 $P_{1995}=$________.

4. $S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$的值是________.

5. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n+2S_nS_{n-1}=0(n\geqslant2)$，数列$\{\frac{1}{S_n}\}$的通项公式为________.

二、解答题

6. 用数学归纳法证明：对一切自然数 n，有

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2=\frac{n(2n^2+1)}{3}.$$

7. 设$f(x)$是非负实数集上取值的函数，对于 $x_1\geqslant0,x_2\geqslant0$，等式

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+2\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$$

成立. 求证：$f(nx)=n^2f(x)(n\in\mathrm{N})$.

8. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_n=\frac{1}{n}$，证明：当 $n\geqslant2$ 时，$S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}=n(S_n-1)$.

9. 用数学归纳法证明：对任何自然数 n，$a^{n+2}+(a+1)^{2n+1}$可以被 a^2+a+1 整除.

10. 证明：任一有限集合的全部子集可以排成一排，使得任意两个相邻的子集之间都只相差一个元素（即相邻两子集中一个子集比另一个子集多一个元素，而其他元素完全相同）.

11. 数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\frac{1}{(n+1)^2}(n\in\mathrm{N})$，记$f(n)=(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot(1-a_3)\cdots(1-a_n)$，试求$f(1),f(2),f(3),f(4)$的值，猜测出计算$f(n)$的公式，并用数学归纳法加以证明.

12. 在自然数集 N 上定义的函数 $y=f(n)$，满足 $f(n+1)=\frac{4-f(n)}{f(n)+2}(n\in\mathrm{N})$，且$f(1)=2$，是否存在实数 a,b 使得

$$f(n)=\frac{1}{a(-\frac{3}{2})^n-b}+1$$

对任意 $n\in N$ 成立？证明你的结论.

13. 证明，对任何自然数 n，都存在一个自然数 m，使得下述等式成立：

$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}.$$

第二讲　等差数列与等比数列

知识点和方法述要

1. 等差数列、等比数列

	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1}-a_n=d$(常数) $(n=1,2,3\cdots)$	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(常数 $q\neq0$) $(n=1,2,3\cdots)$
中项公式	$A=\frac{a+b}{2}$	$G=\pm\sqrt{ab}$
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1q^{n-1}$
前 n 项和公式	$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$	$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $S_n=na_1(q=1)=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq1)$
	1.若$\{a_n\}$是等差数列,则 $a_n=d\cdot n+b$(d 为公差),反之成立. 2.若等差数列$\{a_n\}$的公差是 d,第 m 项是 a_m,则 $a_n=a_m+(n-m)d$. 3.若$\{a_n\}$是等差数列,$k,l,m,n\in\mathbf{N}$,则 $k+l=m+n\Leftrightarrow a_k+a_l=a_m+a_n$. 4.若$\{a_n\}$是等差数列,则它的前 n 项和 $S_n=an^2+bn$(a、b 为已知常数),反之成立.	1.若$\{a_n\}$是等比数列,则 $a_n=c\cdot q^n$(其中 q 是公比,$c\neq0$),反之成立. 2.若等比数列$\{a_n\}$的公比是 q,第 m 项是 a_m,则 $a_n=a_m\cdot q^{n-m}$. 3.若$\{a_n\}$是等比数列,$k,l,m,n\in\mathbf{N}$,则 $k+l=m+n\Leftrightarrow a_k\cdot a_l=a_m\cdot a_n$.

2. 数列的极限

(1) 如果存在一个常数 A,对于预先给定的任意小的正数 ε,总

有自然数 N,使得 $n>N$ 时 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立,则常数 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

(2) 数列极限具有以下的运算性质:设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在,则有

(ⅰ) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(ⅲ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0)$.

3. 数列极限存在的判别方法

(1) 若 $x_n\leqslant a_n\leqslant y_n(n=1,2,3\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

(2) 单调递增(或递减)有上界(或下界)的数列有极限.

4. 重要极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$($c$ 为常数);

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=1$.

5. 无穷递缩等比数列 $\{a_n\}$ 所有项的和

$$S=\frac{a_1}{1-q}(|q|<1).$$

例 题 精 讲

例 1 有四个数,其中前三个数成等差数列,后三个数成等比数列,并且第一个数与第四个数的和是 16,第二个数与第三个数的和是 12.求这四个数.

解 依题设,可设四个数分别为 $x-d$、x、$x+d$、$\frac{(x+d)^2}{x}$,且

$$\begin{cases}(x-d)+\frac{(x+d)^2}{x}=16,\\ x+(x+d)=12.\end{cases}$$

可解得 $\begin{cases}x_1=4,\\ d_1=4;\end{cases}\begin{cases}x_2=9,\\ d_2=-6.\end{cases}$ 于是所求四个数为 0、4、8、16 或 15、9、3、1.

注 在等差数列和等比数列中,常采用呈对称性结构的设项方式,如 $\cdots, a-2d, a-d, a, a+d, a+2d, \cdots$; $\cdots, aq^{-1}, a, aq, aq^2$,以便减少变元,简化计算.

例 2 设 $\{a_n\}$ 是正数组成的数列,对于所有自然数 n,a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的等比中项,求 a_n.

分析一 $n=1$ 时依题设,有

$$\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2S_1},$$

又 $S_1=a_1$,故

$$\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2a_1},$$

解得 $a_1=2$.

当 $n=2$ 时,$a_2>0$,且

$$\begin{cases}\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n},\\ S_2=a_1+a_2,\end{cases}$$

解得 $a_2=6$.

当 $n=3,4$ 时,类似地可解得 $a_3=10, a_4=14$.

猜想 $a_n=4n-2$. 以下用数学归纳法给出证明.

$n=1$ 时如前所述,猜想成立. 假设 $n=k$ 时猜想成立,即 $a_k=4k-2$,依题设,有

$$\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n},$$

于是
$$\frac{(4k-2)+2}{2}=\sqrt{2S_n},$$
解得 $S_k=2k^2$. 当 $n=k+1$ 时,依题设,有
$$\frac{a_{k+1}+2}{2}=\sqrt{2S_{k+1}},$$
$$S_{k+1}=S_k+a_{k+1},$$
故
$$\left(\frac{a_{k+1}+2}{2}\right)^2=2(2k^2+a_{k+1}),$$
即
$$a_{k+1}^2-4a_{k+1}+4-16k^2=0.$$
$$\Leftrightarrow[a_{k+1}-(4k+2)][a_{k+1}+(4k-2)]=0.$$
因 $a_{k+1}>0$,故 $a_{k+1}=4k+2=4(k+1)-2$, $n=k+1$ 时,猜想成立.

综上所述,对任意 $n\in N$, $a_n=4n-2$.

分析二 直接利用 a_n 与 S_n 的关系.依题设,有
$$\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n},$$
可得 $S_n=\frac{1}{8}(a_n+2)^2$,于是
$$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{1}{8}[(a_{n+1}-2)^2-(a_n+2)^2],$$
化简得
$$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-4)=0.$$
依题设知 $a_{n+1}+a_n\neq0$,故
$$a_{n+1}-a_n=4.$$
所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=2$, $d=4$ 为公差的等差数列,有 $a_n=2+4(n-1)=4n-2$.

例 3 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n\neq0$. 求证:数列 $\{a_n\}$ 成等差数列的充要条件是
$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}(n\geqslant2) \qquad ①$$
恒成立.

证明 设数列$\{a_n\}$为等差数列，公差为 d，

$$S_n' = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}}$$

（ⅰ）若 $d=0$，则

$$S_n' = \frac{n}{a_1a_2} = \frac{n}{a_1a_{n+1}},$$

①式成立.

（ⅱ）若 $d\neq0$ 时，则

$$S_n' = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\cdot\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n-1}}$$

$$= \frac{nd}{d\cdot a_1a_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}},$$

①式成立.

综上所述，必要性获证.

以下运用数学归纳法证明充分性.

依题设，$S_n' = \dfrac{n}{a_1a_{n+1}}$（$n\geqslant2$）恒成立.

（ⅰ）当 $n=2$ 时，由

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} = \frac{2}{a_1a_3},$$

可得 $$2a_2 = a_1 + a_3.$$

故 a_1,a_2,a_3 成等差数列.

（ⅱ）假设 $n=k(\geqslant2)$时，命题成立. 即 $S_k' = \dfrac{k}{a_1a_{k+1}}$成立，且 a_1，$a_2,\cdots a_k$，a_{k+1}成等差数列，$a_{k+1}=a_1+kd$（d 为公差），$S_{k+1}' = \dfrac{k+1}{a_1a_{k+2}}$，故

$$\frac{k}{a_1 a_{k+1}}+\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}=\frac{k+1}{a_1 a_{k+2}},$$

即 $$ka_{k+2}+a_1=(k+1)a_{k+1},$$

所以 $$ka_{k+2}+a_1=(k+1)(a_1+kd),$$

化简得 $$a_{k+1}=a_1+(k+1)d.$$

从而表明 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1},a_{k+2}$成等差数列，$n=k+1$ 时命题成立.

综上所述，充分性获证.

例4 已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中有 $a_n=a_{n-1}b_n, b_n=\frac{b_{n-1}}{1-a_{n-1}^2}$($n\geqslant 2$). 当 $a_1=p, b_1=q(p>0,q>0)$，且 $p+q=1$ 时，

(1) 求证：$a_n>0, b_n>0$，且 $a_n+b_n=1(n\in\mathbf{N})$；

(2) 求证：$a_n+1=\frac{a_n}{a_{n+1}}$；

(3) 求数列$\{a_n^2\cdot b_{n+1}\}$所有项的和.

证明 (1) 当 $n=1$ 时，命题显然成立. 假设 $n=k$ 时命题成立，当 $n=k+1$ 时，因 $0<a_k<1$，故 $1-a_k^2>0$，于是 $b_{k+1}=\frac{b_k}{1-a_k^2}>0$，$a_{k+1}=a_kb_{k+1}>0$.

$$\begin{aligned}a_{k+1}+b_{k+1}&=a_kb_{k+1}+b_{k+1}=(a_k+1)b_{k+1}\\&=\frac{(a_k+1)b_k}{1-a_k^2}=\frac{b_k}{1-a_k}=\frac{b_k}{b_k}=1,\end{aligned}$$

命题当 $n=k+1$ 时也成立. 综上所述，命题获证.

(2) 欲证 $a_n+1=\frac{a_n}{a_{n+1}}$，即证$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$. 而

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}&=\frac{1}{a_nb_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n}\left(\frac{1}{b_{n+1}}-1\right)\\&=\frac{1}{a_n}\left(\frac{1-a_n^2}{b_n}-1\right)=\frac{1}{a_nb_n}(1-b_n-a_n^2)\\&=\frac{1}{a_nb_n}(a_n-a_n^2)=\frac{1-a_n}{b_n}=1,\end{aligned}$$

故命题成立.

(3) 由(2)知，$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)=\frac{1}{p}+(n-1)$，所以 $a_n=\frac{p}{p(n-1)+1}$. 又 $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，故

$$
\begin{aligned}
a_n^2 b_{n+1} &= a_n^2\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}=a_n\cdot a_{n+1}\\
&=\frac{p}{p(n-1)+1}\cdot\frac{p}{pn+1}\\
&=p\left[\frac{1}{p(n-1)+1}-\frac{1}{pn+1}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} p\left[\frac{1}{p(n-1)+1}-\frac{1}{pn+1}\right]\\
&= p\left(1-\frac{1}{pn+1}\right).
\end{aligned}
$$

进而，有
$$\lim_{n\to\infty} S_n=p.$$

例 5 $n^2(n\geqslant 4)$个正数排成 n 行 n 列：

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\
\cdots & & & & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{matrix}
$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有公比相等. 已知 $a_{24}=1$，$a_{42}=\frac{1}{8}$，$a_{43}=\frac{3}{16}$，求 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

解 设第一行数列公差为 d，各列数列公比为 q，则第四行数列的公差是 dq^3. 于是可得

$$\begin{cases} a_{24}=(a_{11}+3d)q=1, \\ a_{42}=(a_{11}+d)q^3=\dfrac{1}{8}, \\ a_{43}=\dfrac{1}{8}+dq^3=\dfrac{3}{16}, \end{cases}$$

解之,得 $a_{11}=d=q=\pm\frac{1}{2}$. 依题设,$n^2$ 个数都是正的,所以

$$a_{11}=d=q=\frac{1}{2}.$$

对于任意 $1\leqslant k\leqslant n$,有

$$a_{kk}=a_{1k}q^{k-1}=[a_{11}+(k-1)d]q^{k-1}=\frac{k}{2^k}.$$

于是
$$S=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n},$$

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+2\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+(n-1)\cdot\frac{1}{2^n}+n\cdot\frac{1}{2^{n+1}},$$

两式相减后得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\\&=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

所以 $S=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$,即为所求.

例 6 设实数 $a\neq0$,数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a,公比为 $-a$ 的等比数列,记

$$b_n=a_n\lg|a_n|\ (n=1,2,\cdots),$$

$$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n(n=1,2,\cdots),$$

(1) 求证:当 $a\neq-1$ 时,对任意自然数 n,都有

$$S_n=\frac{a\lg|a|}{(1+a)^2}[1+(-1)^{n+1}(1+n+na)a^n].$$

(2) 试问：当 $0<a<1$ 时，是否存在自然数 M，使得对任意自然数 n，都有 $b_n\leqslant b_M$？证明你的结论.

证明 (1) 依题设，有

$$a_n=a(-a)^{n-1}=(-1)^{n-1}a^n,$$

所以 $b_n=a_n\lg|a_n|=(-1)^{n-1}na^n\lg|a|\quad(n=1,2,\cdots)$.

于是

$$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$
$$=a\lg|a|[1-2a+3a^2+\cdots+(-1)^{n-1}na^{n-1}], ①$$
$$aS_n=a\lg|a|[a-2a^2+\cdots+(-1)^{n-1}na^n]. \quad ②$$

①+②得

$(1+a)S_n=a\lg|a|[1-a+a^2+\cdots+(-1)^{n-1}a^{n-1}+(-1)^{n-1}na^n]$.

因 $a\neq-1$，有 $1+a\neq0$，所以

$$S_n=\frac{a\lg|a|}{1+a}\left[\frac{1-(-a)^n}{1-(-a)}+(-1)^{n+1}na^n\right],$$

即
$$S_n=\frac{a\lg|a|}{(1+a)^2}[1+(-1)^{n+1}a^n(1+n+na)].$$

(2) 因 $0<a<1$，所以 $\lg|a|=\lg a<0$. 当 n 是奇数时，$b_n=(-1)^{n-1}na^n\lg a<0$；当 n 是偶数时，$b_n=(-1)^{n-1}na^n\lg a>0$. 欲求最大项值，只须考虑 n 为偶数的情形. 对于自然数 k，有

$$\frac{b_{2k+2}}{b_{2k}}=\frac{(2k+2)a^2}{2k}=\left(1+\frac{1}{k}\right)a^2,$$

所以，当 $\frac{1}{k}\geqslant\frac{1}{a^2}-1$ 时，$\left(1+\frac{1}{k}\right)a^2\geqslant1$；当 $\frac{1}{k}<\frac{1}{a^2}-1$ 时，$\left(1+\frac{1}{k}\right)a^2<1$. 现取 m 为不大于 $\frac{a^2}{1-a^2}$ 的最大整数，则有 $b_{2k+2}\geqslant b_{2k}(k\leqslant m)$ 或 $b_{2k+2}<b_{2k}(k>m)$，即有

$$b_2\leqslant b_4\leqslant\cdots\leqslant b_{2m+2},$$
$$b_{2m+2}>b_{2m+4}>\cdots.$$

所以可取 $M=2m+2$，则对任意自然数 n，都有 $b_n\leqslant b_M$.

例 7 在公比大于 1 的等比数列中,最多有连续几项是在 100 与 1000 之间的整数.

分析 设等比数列 $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}$满足题设要求,则 n 项全是整数且$r>1$. 显然 r 是有理数,设 $r=\frac{p}{q}$($p>q\geqslant 1, p, q$ 互质). 因 $ar^{n-1}=a(\frac{p}{q})^{n-1}$是整数,所以 $q^{n-1}\mid a$,欲使 n 最大可取$p=q+1$,使

$$100\leqslant a<a(\frac{q+1}{q})<\cdots<a(\frac{q+1}{q})^{n-1}\leqslant 1000.$$

如果 $q\geqslant 3$,那么

$$4^{n-1}\leqslant(q+1)^{n-1}\leqslant a(\frac{q+1}{q})^{n-1}\leqslant 1000,$$

此时 $n\leqslant 5$.

如果 $q=1$,那么

$$100\cdot 2^{n-1}<a\cdot 2^{n-1}=a(\frac{q+1}{q})^{n-1}\leqslant 1000.$$

此时,$n\leqslant 4$.

如果 $q=2$,那么

$$100(\frac{3}{2})^{n-1}\leqslant a(\frac{3}{2})^{n-1}=a(\frac{q+1}{q})^{n-1}\leqslant 1000.$$

此时 $n\leqslant 6$.

现可构造 $r=\frac{3}{2}$ 的等比数列 128,192,288,432,648,972. 它符合题设条件,且含有 6 项.

由上述知,$n=6$ 为所求.

例 8 设$\triangle ABC$ 是边长为 a 的正三角形,又在三边 AB、BC、CA 上各取一点A_1、B_1、C_1 为顶点作正三角形 $A_1B_1C_1$,且$\angle B_1A_1B=\alpha$($0<\alpha<\frac{\pi}{3}$). 然后,再依此方式顺次作出如图 2-1 所示的正三角形序列 $A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \cdots A_nB_nC_n, \cdots$. 设$\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 S_n,现要使

所有新作三角形面积的和 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 等于 $\triangle ABC$ 的面积，试确定 α 的值是多少？

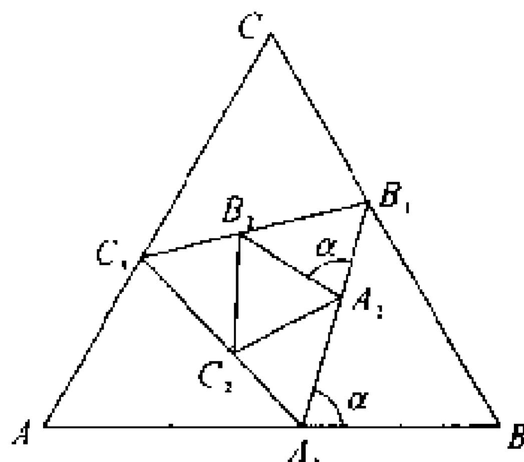


图 2－1

解 设 $A_nB_n = x_n$，$x_0 = AB = a$，$A_nA_{n+1} = y_n$. 则如图 2－2，易见 $B_nB_{n+1} = y_n$.

根据正弦定理得

$$\frac{x_{n+1}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{y_n}{\sin\alpha},$$

所以 $$y_n = \frac{2}{\sqrt{3}} x_{n+1} \sin\alpha. \quad ①$$

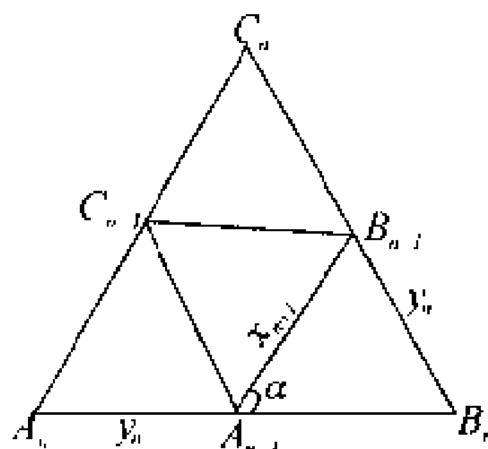


图 2－2

又 $$x_n = y_n + x_{n+1}\cos\alpha + y_n\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{3}{2} y_n + x_{n+1}\cos\alpha, \quad ②$$

①代入②得

$$x_n = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x_{n+1} \cdot \sin\alpha\right) + x_{n+1}\cos\alpha$$

$$= (\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha) x_{n+1}$$

$$= 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) x_{n+1},$$

所以 $$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 = \frac{1}{4\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 S_1，公比为 $\frac{1}{4\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}$ 的等比数列.

由于 $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$，从而 $\frac{\pi}{6} < \alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$，有 $\frac{1}{2} < \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) < 1$，进而有 $\frac{1}{4} < \frac{1}{4\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} < 1$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{\triangle A_nB_nC_n} = \frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{1-\dfrac{1}{4\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}},$$

又
$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{4\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)} S_{\triangle ABC},$$

且依题设有 $S_{\triangle ABC} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} S_{\triangle A_nB_nC_n}$，故

$$1-\frac{1}{4\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{4\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)},$$

化简得
$$\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

注意到 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$.

例 9 边长为 1 的正三角形 ABC 的各边都是 n 等分. 过各分点作平行于其他两边的直线，将这个三角形分成若干小三角形，各小三角形的顶点都称为结点. 在每个结点上放置一个实数. 如图 2-3，已知

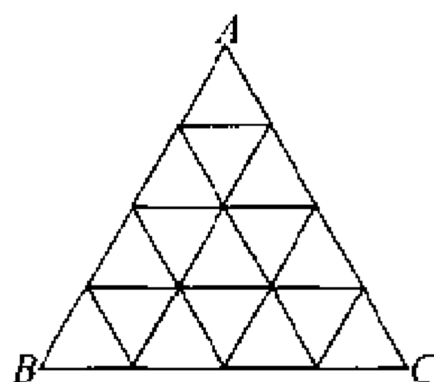


图 2-3

(i) A、B、C 三点上放置的数分别为 a，b，c；

(ii) 在每个由有公共边的两个最小三角形组成的菱形之中，两组相对顶点的数之和相等. 试求

(1) 放置最大数的点与放置最小数的点之间的最短距离 r.

(2) 所求结点上的数的总和 S.

分析 (1)显然，所有结点都在所作直线和$\triangle ABC$ 的边界上. 如图 2-4，观察可知任意三个相邻结点三角形. 可组成梯形，不妨假设其各结点放置的数为 x,y,z,u,v,w，我们可证明 u,v,w 成等差数列. 事实上，由(ii)得 x

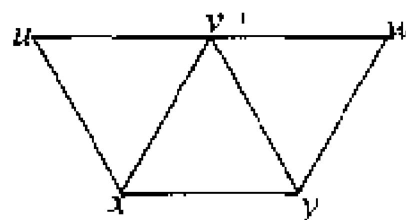


图 2-4

$+w=y+v, y+u=x+v$,两式相加得 $2v=u+w$.

由上述结论我们可推出,分别在所作直线及$\triangle ABC$边上的结点上所放置的数各自依次成等差数列,而等差数列中的最大数及最小数必在其两端,故最大数及最小数必属于$\{a,b,c\}$.

若 $a=b=c$,则每一结点既放置最大数又放置最小数,$r=0$.

若 a,b,c 中有两个相等,不妨设 $a=b<c$,则线段 AB 上所有结点都是放置最小数的点,放置的数均是 a. 当 n 是偶数时,AB 的中点恰好是结点,故 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$;当 n 是奇数时,AB 的中点不是结点,与中点相邻的两结点到 C 的距离最短,此时

$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2n}\right)^2}=\frac{1}{2n}\sqrt{3n^2+1}.$$

当 a,b,c 互不相等时,显然 $r=1$.

(2) AC 上结点所放置的数为 $a+\frac{k}{n}(c-a)(k=0,1,2,\cdots,n)$, BC 上结点所放置的数为 $b+\frac{k}{n}(c-b)(k=0,1,2,\cdots,n)$,与 AB 平行的直线上结点数依次为等差数列,故

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\left[a+\frac{k}{n}(c-a)+b+\frac{k}{n}(c-b)\right](n-k+1)\\&=\frac{a+b}{2}\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)+\frac{2c-a-b}{2n}\sum_{k=0}^{n}k(n-k+1)\\&=\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(a+b)+\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(2c-a-b)\\&=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(a+b+c).\end{aligned}$$

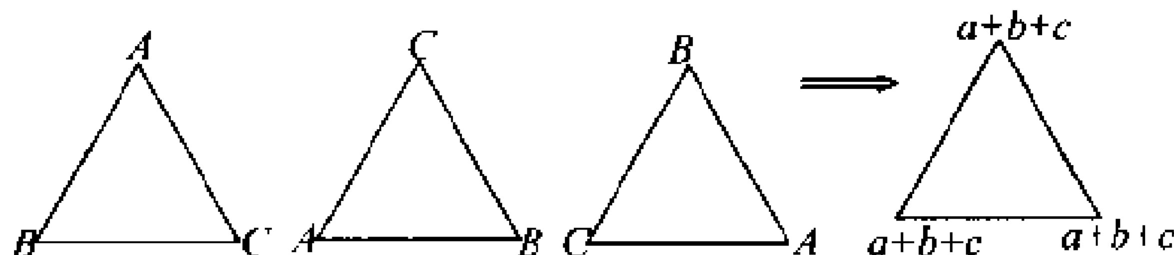


图 2-5

注 如果将上述结果改写为$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\cdot\frac{a+b+c}{3}$,并且由此作几何解释,可以给出一个非常漂亮的解法:将同一三角形按不同方位放置,如图 2-5,再将它们叠合在一起组成一个新三角形,它仍满足(ii).因为其顶点上所放置的数也均为 $a+b+c$.由此可得和为$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)(a+b+c)$,即为$3S$.从而 $S=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(a+b+c)$.

练 习 二

一、选择题

1. 各项都是正数的等比数列$\{a_n\}$中,公比 $q\neq1$,a_3,a_5,a_6 成等差数列,则$\frac{a_3+a_5}{a_4+a_6}$的值等于 ( ).

(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 不能确定

2. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2$,则$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{998}}+\sqrt{a_{999}}}$的值等于 ( ).

(A) $\frac{\sqrt{1996}-1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{1997}-1}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{1998}-1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{1999}-1}{2}$

3. 已知等比数列$\{a_n\}$首项为 a_1,公比为 q,且有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_1}{1+q}-q^n)=\frac{1}{2}$,则 a_1 取值范围是 ( ).

(A) $(0,1)$ (B) $(0,1)\cup\{-3\}$

(C) $(0,\frac{1}{2})$ (D) $(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)\cup\{3\}$

二、填空题

4. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$S_m=16$，$S_{2m}=64$，则 $S_{3m}=$________.

5. 各项为实数的等差数列的公差为4，其首项的平方与其余各项之和不超过100，这样的数列至多有________项.

6. 已知数列$\{a_n\}$成等差数列，数列$\{\sin a_n\}$成等比数列，则等比数列的公比 $q=$________.

三、解答题

7. 设$\{a_n\}$是等差数列，$b_n=(\frac{1}{2})^{a_n}$. 已知 $b_1+b_2+b_3=\frac{21}{8}$，$b_1b_2b_3=\frac{1}{8}$. 求等差数列的通项 a_n.

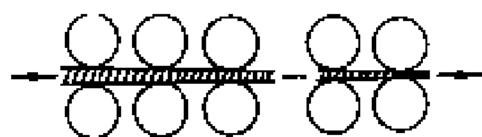
8. 在$\triangle ABC$中如果三边a,b,c成等差数列，试证$\cot\frac{A}{2}$，$\cot\frac{B}{2}$，$\cot\frac{C}{2}$也成等差数列.

9. 一个只有五项的等比数列，其中每一项都是小于100的正整数，五项和为211. 如果S是这个数列中恰为一整数的平方的各项之和，求S的值.

10. 证明：由正整数组成的无穷项等差数列的所有项不可能都是素数(公差不为零).

11. 能否在数列$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots\frac{1}{2^n},\cdots$中，选出一无穷等比数列，使其和为$\frac{1}{5}$?

12. 右图为一台冷轧机的示意图. 冷轧机由若干对轧辊组成. 带钢从一端输入，经过各对轧辊逐步减薄后输出.



(第12题)

(1) 输入带钢的厚度为α，输出带钢的厚度为β，若每对轧辊的减薄率不超过r_0，问冷轧机至少需要安装多少对轧辊?

$$\left(\text{一对轧辊减薄率}=\frac{\text{输入该对轧辊的带钢厚度}-\text{从该对轧辊输出的带钢厚度}}{\text{输入该对轧辊的带钢厚度}}\right)$$

(2) 已知一台冷轧机共有4对减薄率为20%的轧辊，所有轧辊周长均为1600mm. 若第k对轧辊有缺陷，每滚动一周在带钢上压出一个疵点，在冷轧机输出的带钢上，疵点的间距为L_k，为了便于检修，请计算L_1，L_2，L_3并填入下表(轧钢过程中，带钢宽度不变，且不考虑损耗).

轧辊序号 k	1	2	3	4
疵点间距 L_k(单位:mm)				1600

13. 设两个数列$\{a_n\}$及$\{b_n\}$满足$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(1+2+\cdots+n)b_n$，其中$\{b_n\}$是以$d(\neq 0)$为公差的等差数列.

(1) 试证$\{a_n\}$是等差数列；

(2) 若$a_1\neq 0$，试求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$的值.

14. 正数列$\{a_n\}$中，$n\geqslant 3$且$a_1<a_2<\cdots<a_n$，求证：数列$\{a_n\}$成等差数列的充要条件是

$$\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}-a_n}=\frac{(n-1)^2}{a_1-a_n}$$

对一切自然数$n(\geqslant 3)$成立.

第三讲 证明不等式的基本方法

知识点和方法述要

1. 不等式的性质

(1) 实数的重要性质

设 $a\in \mathrm{R}, b\in \mathrm{R}$,则 $a>b, a=b, a<b$ 三者居且必居其一,而且有

$$a>b\Leftrightarrow a-b>0;$$
$$a=b\Leftrightarrow a-b=0;$$
$$a<b\Leftrightarrow a-b<0.$$

(2) 不等式的基本性质

(ⅰ) 反身性:$a>b\Leftrightarrow b<a$;

(ⅱ) 传递性:$a>b, b>c\Rightarrow a>c$;

(ⅲ) 加法单调性:$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$;

(ⅳ) 移项法则:$a+b>c\Leftrightarrow a>c-b$;

(ⅴ) 同向不等式可加性:$a>b, c>d\Rightarrow a+c>b+d$;

(ⅵ) 乘法单调性:$a>b, c>0\Rightarrow ac>bc$,

$$a>b, c<0\Rightarrow ac<bc;$$

(ⅶ) 同向正值不等式可以相乘:$a>b>0, c>d>0\Rightarrow ac>bd$;

(ⅷ) 正值不等式两边可以同时取 n 次幂:$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n>0(n\in \mathrm{N})$;

(ⅸ) 正值不等式两边可以同时取 n 次算术根:$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}>0(n\in \mathrm{N})$.

2. 证明不等式,即比较不等式两边的大小.

(1) 根据实数的有序性.在证明不等式 $A>B$ 或 $A<B$ 时,直接把 $A-B$ 与 0 比较大小,或把 $\frac{A}{B}(A, B\in \mathrm{R}^+)$ 与 1 比较大小,最后推

演出结论.这种方式从形式上看,较为“原始”,却是立足基本,是占有突出地位的证明不等式的基本方式,不容忽视.作差后实行配方是常采取的步骤.

(2) 对于数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,由于

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}),$$

$$y_n = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + (y_n - y_{n-1}),$$

因此,

(i) 若 $x_1 \geqslant y_1$,且$(x_k - x_{k-1}) - (y_k - y_{k-1}) \geqslant 0 (k \geqslant 2)$或$\frac{x_k}{x_{k-1}} \bigg/ \frac{y_k}{y_{k-1}} \geqslant 1 (k \geqslant 2, x_{k-1}, x_k, y_{k-1}, y_k$ 均为正数),那么 $x_n \geqslant y_n$;

(ii) 若 $x_1 \leqslant y_1$ 且$(x_k - x_{k-1}) - (y_k - y_{k-1}) \leqslant 0 (k \geqslant 2)$或$\frac{x_k}{x_{k-1}} \bigg/ \frac{y_k}{y_{k-1}} \geqslant 1 (k \geqslant 2, x_{k-1}, x_k, y_{k-1}, y_k$ 均为正数),那么 $x_n \leqslant y_n$.

在以上事实的基础上,借助比较方式用来证明某些不等式较为便利.

3. 综合分析法、数学归纳法、反证法是证明不等式的三种基本方法.

(i) 证明不等式常采用综合法或分析法.具体地说,所谓“综合”指由“因”导“果”,从已知条件出发,依据不等式性质、函数性质、重要不等式等逐步推进,证得所要证的不等式.所谓“分析”,指的是执“果”索“因”,从欲证不等式出发,层层推求使之成立的充分条件,直至已知事实为止.综合与分析,二者常常结合起来使用.从思维角度看,应该说,所有不等式证明都离不开综合与分析.

(ii) 数学归纳法是证明与自然数 n 有关命题的常用方法.不少不等式与自然数 n 密切相关,它们的证明有相当一部分得益于数学归纳法.

(iii) 反证法是从命题结论的反面入手,经一系列正确的逻辑推理,引出矛质结果,从而确认所要证明的结论成立的一种方法.它在

不等式证明中也是基本方法之一.

例题精讲

例 1 设 $x, y, z \in \mathbf{R}$, $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 求证:

$$\frac{b+c}{a}x^2+\frac{c+a}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2 \geqslant 2(xy+yz+zx).$$

证明 作差,记

$$A=\frac{b+c}{a}x^2+\frac{c+a}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2-2(xy+yz+zx).$$

因为 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 所以

$$A=\left(\frac{b}{a}x^2+\frac{a}{b}y^2-2xy\right)+\left(\frac{c}{a}x^2+\frac{a}{c}z^2-2zx\right)+\left(\frac{c}{b}y^2+\frac{b}{c}z^2-2yz\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x-\sqrt{\frac{a}{b}}y\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a}}x-\sqrt{\frac{a}{c}}z\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{b}}y-\sqrt{\frac{b}{c}}z\right)^2 \geqslant 0.$$

命题获证.

例 2 已知 $0<x<1$, 求证:

$$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$$

证一 作差,并分两种情形.

(i) 当 $0<a<1$ 时,因 $0<x<1$, 故

$$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$$
$$=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)$$
$$=\log_a(1-x^2)>0.$$

(ii) 当 $a>1$ 时,因 $0<x<1$, 故

$$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$$
$$=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)$$

$$= -\log_a(1-x^2) > 0.$$

综合(i),(ii),知不等式成立.

证二 因为$0<x<1$,所以 $|\log_a(1-x)|>0, |\log_a(1+x)|>0$,有

$$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|} = |\log_{(1+x)}(1-x)| = -\log_{(1+x)}(1-x)$$

$$= \log_{(1+x)}\frac{1}{1-x} = \log_{(1+x)}\frac{1+x}{1-x^2}$$

$$> \log_{(1+x)}(1+x) = 1,$$

所以不等式成立.

例3 $n\in\mathrm{N}$,证明:$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\geqslant\frac{3n}{2n+1}$.

证明 设 $x_k = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}, y_k=\frac{3k}{2k+1}$. 于是 $x_1=y_1=1$.

当 $k\geqslant 2$ 时,有

$$x_k - x_{k-1} = \frac{1}{k^2},$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{3k}{2k+1} - \frac{3(k-1)}{2(k-1)+1} = \frac{3}{4k^2-1}.$$

从而 $$(x_k - x_{k-1}) - (y_k - y_{k-1})$$

$$= \frac{1}{k^2} - \frac{3}{4k^2-1} = \frac{k^2-1}{k^2(4k^2-1)} \geqslant 0.$$

故不等式获证.

例4 对于实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$,求证,不等式 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\leqslant 0$ 在 $n=3,4$ 时成立,$n\geqslant 5$ 时不成立.

证明 (1) 若 $x_1+x_2+x_3=0$,那么

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)]$$

$$= -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leqslant 0.$$

(2) 若 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$,那么

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$$

$$\leqslant (\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2})^2 = 0.$$

(3) 当 $n \geqslant 5$ 时,取 $x_1 = x_2 = 1, x_4 = -2, x_3 = x_5 = x_6 = \cdots = x_n = 0$,此时 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$,但

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 1 > 0,$$

可见不等式不成立.

上述证明,主要采用综合方式,以下就分析方式举例说明.

例 5 已知 $n \in \mathrm{N}$,求证:

$$\frac{1}{n+1}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}) \geqslant \frac{1}{n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}).$$

证明 欲证上述不等式,只需证

$$n(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}) \geqslant (n+1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}). \quad ①$$

①式左边即

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + n(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}). \quad ②$$

①式右边即

$$n(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n})$$

$$= \frac{n}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}) + n(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}) \quad ③$$

比较②,③,欲证原不等式,只需

$$\frac{n}{2} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad ④$$

及 $$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\geqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n} \quad ⑤$$

成立.而④,⑤的成立是明显的,故所欲证不等式成立.

例6 设有 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足条件:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1,$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中最小者为 a,最大者为 b,分别记作 $a=\min\{x_1, x_2,\cdots x_n\}$, $b=\max\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$.求证:$ab\leqslant-\frac{1}{n}$.

证明 只须证明

$$1+nab\leqslant 0. \quad ①$$

根据题设条件,①可改写为

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-(x_1+x_2+\cdots+x_n)(a+b)+nab\leqslant 0. \quad ②$$

②又可改写为

$$[x_1^2-(a+b)x_1+ab]+[x_2^2-(a+b)x_2+ab]+\cdots+[x_n^2-(a+b)+x_n+ab]\leqslant 0. \quad ③$$

现只须再证明

$$x_i^2-(a+b)x_i+ab\leqslant 0(i=1,2,\cdots,n),$$

即 $$(x_i-a)(x_i-b)\leqslant 0(i=1,2,\cdots,n). \quad ④$$

④式显然成立,故命题获证.

注 将①改为②,是本例分析中关键一步.这一“妙着”与发掘题设中所隐含的关系 $(x_i-a)(x_i-b)\leqslant 0$,可以说是一脉相承.

例7 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.试证:对每一个 $n\in\mathbf{N}$.

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1} \quad ①$$

证明 (ⅰ) $n=1$ 时,不等式①显然成立.

(ⅱ) 假设 $n=k$ 时,不等式①成立,即有

$$(a+b)^k-a^k-b^k\geqslant 2^{2k}-2^{k+1}. \qquad ②$$

那么

$$\begin{aligned}&(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}\\&=(a+b)[(a+b)^k-a^k-b^k]+a^kb+ab^k. \qquad ③\end{aligned}$$

因为$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，所以 $ab=a+b$. 又

$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot\frac{2}{\sqrt{ab}}=4(a,b\in\mathbf{R}^+),$$

所以

$$ab=a+b\geqslant 4. \qquad ④$$

从而

$$a^kb+ab^k\geqslant 2\sqrt{a^kb\cdot ab^k}\geqslant 2\cdot 2^{k+1}=2^{k+2}. \qquad ⑤$$

将②，④，⑤代入③，得

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}&\geqslant 4(2^{2k}-2^{k+1})+2^{k+2}\\&=2^{2(k+1)}-2^{k+2},\end{aligned}$$

所以，当 $n=k+1$ 时，不等式①成立.

综上所述，命题获证.

例 8 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相等的正整数，证明：

$$\begin{aligned}&(a_1^7+a_2^7+\cdots+a_n^7)+(a_1^5+a_2^5+\cdots+a_n^5)\\&\geqslant 2(a_1^3+a_2^3+\cdots a_n^3)^2.\end{aligned}$$

证明 （ⅰ）$n=1$ 时，

$$a_1^7+a_1^5\geqslant 2\sqrt{a_1^7\cdot a_1^5}=2(a_1^3)^2,$$

不等式成立.

（ⅱ）假设 $n=k$ 时不等式成立，则当 $n=k+1$ 时，不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_k<a_{k+1}$，不等式右边为

$$2(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_k^3+a_{k+1}^3)^2$$

$$= 2(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3)^2 + 4a_{k+1}^3(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3) + 2a_{k+1}^6. \quad ①$$

由归纳假设,有

$$2(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3)^2 \leqslant (a_1^7 + a_2^7 + \cdots + a_k^7) + (a_1^5 + a_2^5 + \cdots + a_k^5), \quad ②$$

故欲证不等式在 $n = k+1$ 时成立,由①、②知只须证明

$$4(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3)a_{k+1}^3 + 2a_{k+1}^6 \leqslant a_{k+1}^7 + a_{k+1}^5,$$

即证
$$4(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3) + 2a_{k+1}^3 \leqslant a_{k+1}^4 + a_{k+1}^2. \quad ③$$

事实上,

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3 \leqslant 1^3 + 2^3 + \cdots + (a_{k+1} - 1)^3 = [\frac{a_{k+1}(a_{k+1} - 1)}{2}]^2.$$

所以

$$\begin{aligned} &4(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3) + 2a_{k+1}^3 \\ \leqslant\ &4[\frac{a_{k+1}(a_{k+1} - 1)}{2}]^2 + 2a_{k+1}^3 \\ =\ &a_{k+1}^4 + a_{k+1}^2. \end{aligned}$$

故③式成立,不等式在 $n = k+1$ 时成立.

综上所述,对一切自然数 n,不等式成立.

例 9 已知 $x_1 > 0, x_1 \neq 1$,且 $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3)}{3x_n^2 + 1}(n \in \mathrm{N})$. 试证:数列 $\{x_n\}$ 或者对任意自然数 n 都满足 $x_n < x_{n+1}$,或者对任意自然数 n 都满足 $x_n > x_{n+1}$.

证明 先作差

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_n(x_n^2 + 3)}{3x_n^2 + 1} - x_n = \frac{2x_n(1 - x_n^2)}{3x_n^2 + 1} \\ &= \frac{2x_n(1 + x_n)(1 - x_n)}{3x_n^2 + 1}. \end{aligned} \quad ①$$

依题设,显然 $x_n > 0(n \in \mathrm{N})$. 所以 $x_{n+1} - x_n$ 与 $1 - x_n$ 的符号相

同，以下再分两种情形.

(i) 若 $0<x_1<1$，利用数学归纳法证明 $1-x_n>0$. $n=1$ 时情形显然. 假设 $n=k$ 时，$1-x_k>0$，于是

$$1-x_{k+1}=1-\frac{x_k(x_k^2+3)}{3x_k^2+1}=\frac{(1-x_k)^3}{3x_k^2+1}>0.$$

综上，对一切自然数 n，$1-x_n>0$，利用①知 $x_{n+1}>x_n$.

(ii) 若 $x_1>1$，同理可证，对一切自然数 n，$x_{n+1}<x_n$.

注 上述证明的可贵之处就在于先作差将问题归结到 $(1-x_n)$ 的符号，造成明朗局势，再施行数学归纳法就只是举手之劳了. 若一开始不分青红皂白强行实施数学归纳法，势必遇到一系列麻烦.

例 10 设实数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足：$a_0=a_n=0$，且

$$a_0-2a_1+a_2\geqslant 0,$$
$$a_1-2a_2+a_3\geqslant 0,$$
$$\cdots\qquad\cdots$$
$$a_{n-2}-2a_{n-1}+a_n\geqslant 0.$$

试证明：$a_k\leqslant 0(k=1,2,\cdots,n-1)$.

证明 假设 $a_k(k=1,2,\cdots,n-1)$ 中至少存在一个正数，不妨设 a_r 是序列 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 中第 1 个出现的正数，则 $a_1\leqslant 0,a_2\leqslant 0,\cdots a_{r-1}\leqslant 0,a_r>0$. 于是

$$a_r-a_{r-1}>0.$$

依题设，有

$$a_{k+1}-a_k\geqslant a_k-a_{k-1}(k=1,2,\cdots,n-1),$$

故从 $k=r$ 起，有

$$a_n-a_{n-1}\geqslant a_{n-1}-a_{n-2}\geqslant\cdots\geqslant a_r-a_{r-1}\geqslant 0,$$

从而
$$a_n\geqslant a_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant a_{r+1}\geqslant a_r>0.$$

与 $a_n=0$ 相矛盾. 故命题获证.

练 习 三

一、选择题

1. $a,b,c,d\in\mathbf{R}$,且 $d>c$,$a+b=c+d$,$a+d<b+c$,则 ( ).

(A) $d>b>a>c$　　(B) $b>c>d>a$

(C) $b>d>c>a$　　(D) $b>d>a>c$

2. 设 $a<b<c<d$,$x=(a+b)(c+d)$,$y=(a+c)(b+d)$,$z=(a+d)(b+c)$,则 ( ).

(A) $x<y<z$　　(B) $x<z<y$

(C) $y<x<z$　　(D) $z<y<x$

3. 若 $1>2a>0$,则 $A=1-a^2$,$B=1+a^2$,$C=\frac{1}{1-a}$, $D=\frac{1}{1+a}$ 的大小顺序是 ( ).

(A) $C>B>A>D$　　(B) $B>C>A>D$

(C) $B>A>C>D$　　(D) $B>C>D>A$

4. 下列四个命题:

①若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b=c$,则 $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>c^{\frac{2}{3}}$;

②若 $a+b+c=1$,则 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$;

③若 $c>a>b>0$,则$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$;

④$a,b\in\mathbf{R}$,$2a>b+1$ 是关于 x 的方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实根的充分必要条件.

其中正确的命题有 ( ).

(A) 1 个　　(B) 2 个

(C) 3 个　　(D) 4 个

二、解答题

5. 已知 $a+b=1, a, b\in\mathbf{R}$,求证 $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$.

6. 已知 $0<a<1, x^2+y=0$,求证:

$$\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a 2+\frac{1}{8}.$$

7. 已知 $a>0, n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}$,求证:

$$\frac{1+a+\cdots+a^n}{a+a^2+\cdots+a^{n-1}}\geqslant\frac{n+1}{n-1}.$$

8. 已知 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$,求证:$a^a b^b c^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

9. 已知 p, q, r 为非负实数,且 $p^2+q^2+r^2=2$,求证:$p+q+r-pqr\leqslant 2$.

10. 设 $a_i, b_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots n)$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$,求证:$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

11. 对于自然数 $n(\geqslant 3)$,求证:$n^{n+1}>(n+1)^n$.

12. 若 $a>0, a\neq 1, n\in\mathbf{N}$,求证:

$$\frac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1}}>\frac{n+1}{n}.$$

13. 设 $0\leqslant t\leqslant 1, 0<x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant x_1\leqslant 1$,求证:

$$(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^t\leqslant 1+x_1^t+2^{t-1}x_2^t+\cdots+n^{t-1}x_n^t.$$

14. 设 $y=ax^2+bx+c, a, b, c\in\mathbf{Z}, |a|=1$,若 $x\in\mathbf{Z}$ 时,总有 $y>0$,证明:$b^2-4ac\leqslant 0$.

15. 设 $a\in\mathbf{N}$,证明:当 $a\geqslant 385$ 时.必有

$$\left[\frac{a}{7}\right]+\left[\frac{a}{5}\right]>\left[\frac{a}{3}\right]+2.$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

第四讲　证明不等式的几种重要技巧

知识点和方法述要

放缩、变量代换、构造都是证不等式的重要技巧.

1. 与等式的证明不同,在不等式的证明中经常采用放缩.所谓"放缩",就是欲证 $A \geqslant B$,可借助一个或多个中间量,通过适当的放大,使得

$$B \leqslant B_1,\ B_1 \leqslant B_2, \cdots, B_{n-1} \leqslant B_n,\ B_n \leqslant A,$$

或通过适当的缩小,使得

$$A \geqslant A_1,\ A_1 \geqslant A_2, \cdots, A_{n-1} \geqslant A_n,\ A_n \geqslant B,$$

利用传递性,证得所要证的不等式.

2. 对结构较为复杂,变量较多,变量间关系不甚明了的不等式,可适当引入新变量,通过代换,简化原有结构,实现某种变通,给证明的成功带来新的转机.

3. 构造是证明不等式的又一重要技巧.针对所欲证不等式的特点,展开类比、联想,抓住知识间的横向联系,构造出图形、数、式、函数等辅助工具,实行转化,达到目的.

例题精讲

例1　求证:$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n(n \geqslant 2)$.

证明　(1) 先证右边不等式.

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1}$$

$$= 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1} + 1} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1})$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + (\underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{2^{n-1}\text{个}})$$

$$= n.$$

(2) 以下证左边不等式

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + (\underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{个}}) - \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}.$$

例 2 设 $x_0 = 5, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. 求证：

$$45 < x_{1000} < 45.1$$

分析 放缩势在必行. 最直接的做法是

$$x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_n) + \cdots + (x_1 - x_0) + x_0$$

$$= \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-2}} + \cdots + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_0} + x_0,$$

再利用

$$5 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n,$$

一次不行，则多次分段放缩，目的可达到，只是计算繁琐. 为缩短这一过程，进行“升次”：

$$x_{k+1}^2=(x_k+\frac{1}{x_k})^2=x_k^2+2+\frac{1}{x_k^2},$$

从而,有

$$x_{k+1}^2-x_k^2=2+\frac{1}{x_k^2}.$$

取 $k=0,1,\cdots,n$,相加即得

$$x_{n+1}^2-x_0^2=2(n+1)+(\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{x_1^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}).\qquad ①$$

由①得 $$x_{1000}^2-x_0^2>2\times 1000.$$

解得 $x_{1000}^2>45$. 同时,又由①得

$$\begin{aligned}x_{1000}^2&=2025+(\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{x_1^2}+\cdots+\frac{1}{x_{99}^2})\\&\quad+(\frac{1}{x_{100}^2}+\cdots+\frac{1}{x_{999}^2})\\&<2025+\frac{100}{x_0^2}+\frac{900}{x_{100}^2}\\&<2025+\frac{100}{25}+\frac{900}{2\times 100+25}\\&<2034.01=(45.1)^2.\end{aligned}$$

注 适度是施行放缩的一大关键所在,既不宜放得过大,也不宜放得太小.

例3 求证:

$$14996<\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{10^6}}<14997.$$

分析 对$\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$作适当放缩:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k}}=\frac{2}{2\sqrt[3]{k}}>\frac{2}{\sqrt[3]{k+1}+\sqrt[3]{k}}$$

$$=\frac{2[\sqrt[3]{(k+1)^2}-\sqrt[3]{k^2}]}{1+\sqrt[3]{k(k+1)}(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k})}$$

$$=\frac{2[\sqrt[3]{(k+1)^2}-\sqrt[3]{k^2}]}{1+\frac{\sqrt[3]{k(k+1)}}{\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}}}$$

$$=\frac{2[\sqrt[3]{(k+1)^2}-\sqrt[3]{k^2}]}{1+\frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{k}{k+1}}+\sqrt[3]{\frac{k+1}{k}}}}$$

$$>\frac{2[\sqrt[3]{(k+1)^2}-\sqrt[3]{k^2}]}{1+\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{(k+1)^2}-\sqrt[3]{k^2}). \qquad ①$$

猜想 $$\frac{1}{\sqrt[3]{k}}<\frac{3}{2}(\sqrt[3]{k^2}-\sqrt[3]{(k-1)^2}). \qquad ②$$

②式等价于

$$2<3k-3\sqrt[3]{k(k-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3k-2>3\sqrt[3]{k(k-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (3k-2)^3>27k(k-1)^2. \qquad ③$$

不难验证③式成立，故②式成立.

k 取 $4,5,\cdots 10^6$，并求和，由①、②可得

$$\frac{3}{2}(\sqrt[3]{(10^6+1)^2}-\sqrt[3]{4^2})<\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{10^6}}<$$

$$\frac{3}{2}(\sqrt[3]{(10^6)^2}-\sqrt[3]{3^2}). \qquad ④$$

又 $\sqrt[3]{(10^6+1)^2}>\sqrt[3]{(10^6)^2}=10^4, \sqrt[3]{3^2}>\sqrt[3]{2^3}=2$，故由④可得所要证不等式.

注 证明与数列求和有关的不等式.放缩——错项相消——达到目的,是施行放缩常采用的三步曲.

例 4 设 $a>1, n\in \mathrm{N}, n\geqslant 2$.求证:$\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}$.

证明 设 $x=\sqrt[n]{a}-1$.因 $a>1$,故 $x>0$,且有 $a=(1+x)^n$,于是

$$\frac{a-1}{n}=\frac{(1+x)^n-1}{n}>\frac{nx}{n}=x,$$

所以

$$\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}.$$

注 本例中证明成功的关键就在于通过变量代换,改变了问题的结构,进而沟通了不等式两边的联系.

例 5 设 $x_i\in \mathrm{N}(i=1,2,\cdots,6)$,且

$$x_1+x_2+\cdots+x_6=x_1x_2\cdots x_6, \qquad ①$$

求证:

$$1<\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6}\leqslant 2. \qquad ②$$

证明 由①知正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 不可能全是 1,故②的左边不等式成立十分显然.

不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_k>1(1\leqslant k\leqslant 6)$,其余各数均为 1,作代换,令 $x_i=1+y_i(i=1,2,\cdots,k)$,则 $y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_k\geqslant 1$,①式变为

$$y_1+y_2+y_3+\cdots+y_k+6=(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_k).③$$

②式右端不等式等价于

$$y_1+y_2+\cdots+y_k\leqslant 6. \qquad ④$$

若 $k\geqslant 3$,那么

$(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_k)$

$$=1+(y_1+y_2+\cdots+y_k)+y_1y_2+\cdots+y_1y_k+y_2y_3+\cdots+y_2y_k$$
$$+\cdots+y_1y_2\cdots y_k$$
$$>1+2(y_1+y_2+\cdots+y_k), \quad ⑤$$

由③,⑤得

$$y_1+y_2+\cdots+y_k\leqslant 6.$$

若 $k=2$,③式即为

$$y_1+y_2+6=(1+y_1)(1+y_2),$$

即

$$1+y_1y_2=6. \quad ⑥$$

因

$$1+y_1y_2=y_1+y_2+(1-y_1)(1-y_2)\geqslant y_1+y_2, \quad ⑦$$

故由⑥,⑦知④式成立.

显然 $k\neq 1$,否则与③矛盾.

例 6 设 $x,y,z\geqslant 0$,且 $x+y+z=1$,求证:

$$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant \frac{7}{27}.$$

证明 不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,则 $x\geqslant \frac{1}{3}\geqslant z, x+y\geqslant \frac{2}{3}$

且

$$2xyz\leqslant \frac{2}{3}xy\leqslant xy,$$

故

$$xy+yz+zx-2xyz\geqslant 0.$$

设 $x+y=\frac{2}{3}+\delta, z=\frac{1}{3}-\delta, 0\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{3}$,则

$$xy+yz+zx-2xyz$$
$$=z(x+y)+xy(1-2z)$$

$$\leqslant z(x+y)+(\frac{x+y}{2})^2(1-2z)$$

$$=(\frac{1}{3}-\delta)(\frac{2}{3}+\delta)+(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2})^2(\frac{1}{3}+2\delta)$$

$$=\frac{7}{27}-\frac{\delta^2}{2}(\frac{1}{2}-\delta)\leqslant\frac{7}{27}.$$

综上所述,所要证的不等式成立.

注 参数的引进,可以把某些不等式转化为等式,以便对数量关系作深一层分析.

例 7 已知 $v\in\mathbf{R}^+$, $u\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,求证:

$$(u-v)^2+(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v})^2\geqslant 8.$$

分析 不等式左边酷似两点间距离公式

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

根号内的部分.构造点 $P(u,\sqrt{2-u^2})$, $Q(v,\frac{9}{v})$,如图 4-1 所示.点 P 位于半圆 $x^2+y^2=2(y\geqslant 0)$上.点 Q 位于双曲线 $xy=9$ 在第一象限内的一支上. $|PQ|^2$ 恰好表示不等式的左边.

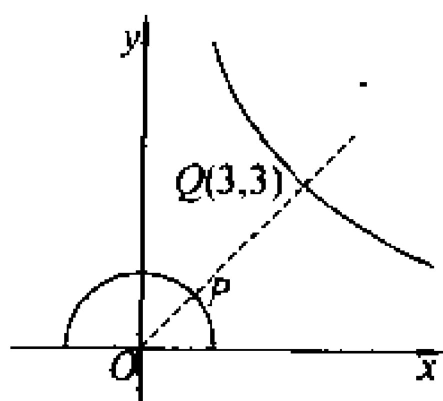


图 4-1

显见,当 P、Q 分别是直线 $y=x$ 与半圆 $x^2+y^2=2(y\geqslant 0)$、双曲线弧 $xy=9(x>0)$的交点时, $|PQ|$ 取最小值.此时 $P(1,1)$, $Q(3,3)$, $|PQ|=2\sqrt{2}$, $|PQ|^2=8$.故不等式得证.

例 8 已知 $x\in\mathbf{R}$, $x\neq 0$,求证: $\frac{x}{1-2^x}<\frac{x}{2}$.

证明 设 $f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}$.则

$$f(-x)=\frac{-x}{1-2^{-x}}+\frac{x}{2}$$

$$=\frac{-x\cdot 2^x}{2^x-1}+\frac{x}{2}$$

$$= -x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2^x - 1}$$

$$= -\frac{x}{2} - \frac{x}{2^x - 1} = f(x).$$

故 $f(x)$是偶函数.

当 $x>0$ 时,易见 $f(x)<0$,根据偶函数的性质,当 $x<0$ 时,$f(x)<0$,故对于 $x\in \mathrm{R}, x\neq 0$,有 $f(x)<0$,即$\frac{x}{1-2^x}<\frac{x}{2}$.

例 9 设$0\leqslant a_i\leqslant a(i=1,2,3,4)$.求证:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a} - \frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1}{a^2} \leqslant 2. \quad ①$$

分析 ①式可改写为

$$a_1(a-a_2)+a_2(a-a_3)+a_3(a-a_4)+a_4(a-a_1)\leqslant 2a^2. \quad ②$$

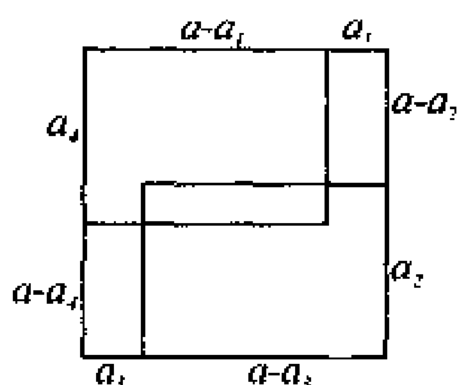


图 4-2

如图 4-2 所示,左边每一项都是图中一个矩形的面积.因这 4 个矩形至多将以 a 为边的正方形覆盖 2 次,所以,这些矩形的面积之和不超过 $2a^2$,不等式②成立.

我们还可以从另一角度考察不等式,再利用构造函数方式证明不等式.

构造关于 a 的二次函数

$$f(a)=2a^2-(a_1+a_2+a_3+a_4)a+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1) \quad ③$$

不妨设 $a_1=\max\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,则 $a\in[a_1,+\infty)$,函数 $f(a)$在$[a_1,+\infty)$上单调递增,可见当 $a=a_1$ 时,有

$$f(a)\min = a_1^2-a_1a_3+a_2a_3+a_3a_4\geqslant 0.$$

故③式成立.

练 习 四

1. 已知 $a>0, a\neq 1$，且 $a^n-2a+1=0(n\in\mathrm{N},\ n\geqslant 2)$. 求证：$a<(n-1)^{-\frac{2}{n}}$.

2. 设 $n\in\mathrm{N}, n\geqslant 2$，求证：$\log_n(n+1)>\log_{(n+1)}(n+2)$.

3. 已知 $n\in\mathrm{N}$，求证：$\dfrac{1}{2n+1}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

4. 已知 $x_i\in\mathrm{R}^+(1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 2)$，求证：

$$1\leqslant\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1}\leqslant n-1.$$

5. 设 $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0$，且 $a+b+c=3$，试证明不等式

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\leqslant\frac{3}{2}\leqslant\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}.$$

6. 设 $a>4$，求证：$\dfrac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}>\dfrac{\lg(a-2)}{\lg 2}$.

7. 设 $l,m,n\in\mathrm{Z}^+$，且 $l+m\leqslant 2n$，求证 $\dfrac{x^l y^m}{1+(x^2+y^2)^n}<1$.

8. 设 a,b,c 为绝对值小于 1 的实数，求证：$ab+bc+ca+1>0$.

9. 证明. 对任意正数 x,y,z，不等式，

$$\sqrt{x^2+xy+\frac{y^2}{3}}+\sqrt{\frac{y^2}{3}+z^2}>\sqrt{z^2+zx+x^2}\text{ 成立.}$$

10. 设 $a,b\in\mathrm{R}^+$，且 $a+b=1$，求证：$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geqslant\dfrac{25}{2}$.

11. 已知 $a>b>0$，求证：$\dfrac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{5}}}{a^{\sqrt{5}}+b^{\sqrt{5}}}>\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

12. 设 $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2\in\mathrm{R}$，满足 $a_1>0, a_2>0, a_1c_1\geqslant b_1^2$，$a_2c_2\geqslant b_2^2$. 求证：$(a_1+a_2)(c_1+c_2)\geqslant(b_1+b_2)^2$.

13. 已知 $x,y,z>0$，并且 $\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{y^2}{1+y^2}+\dfrac{z^2}{1+z^2}=2$. 求证：$\dfrac{x}{1+x^2}$

$+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\leqslant\sqrt{2}$.

14. 设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4\geqslant 2$, $x_2+x_3+x_4\geqslant x_1$. 求证:$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\leqslant 4x_1x_2x_3x_4$.

15. 若 $x_i\in\mathbf{R}^+$($i=1,2,\cdots,n$, $n\geqslant 2$),求证:

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2+x_nx_1}+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2}\leqslant n-1.$$

第五讲　四种重要不等式

知识点和方法述要

1. 平均值不等式

(1) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正数，记 $A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，那么，有 $A_n\geqslant G_n$，其中当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

上述不等式称之为算术—几何平均不等式，简称平均值不等式，它表明 n 个正数的算术平均值不小于其几何平均值，它的应用既广泛且富有变化.

以下给出均值不等式的两种证明.

证一　$n=2$ 时，不等式显然成立. 假设 $n=k$ 时不等式成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
A_{k+1}&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\\
&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}\\
&=\frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}}{2}\\
&\geqslant\frac{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}}{2}\\
&\geqslant\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}}.
\end{aligned}
$$

从而 $$A_{k+1}^{2k}\geqslant a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}A_{k+1}^{k-1},$$

化简，得 $$A_{k+1}\geqslant\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}}.$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}=A_{k+1}$ 时，不等式取等号.

证二 不等式可改写为

$$\frac{a_1}{G_n}+\frac{a_2}{G_n}+\cdots+\frac{a_n}{G_n}\geqslant n.$$

令 $x_i=\frac{a_i}{G_n}(i=1,2,\cdots,n)$. 显然我们只须证明如下辅助命题：对于正数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，有 $x_1x_2\cdots x_n=1$，则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n. \qquad ①$$

施行数学归纳法：

(ⅰ) $n=1$ 时，①式显然成立.

(ⅱ) 假设 $n=k$ 时，①成立. 当 $n=k+1$ 时，对于 $n_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,k+1)$，$x_1x_2\cdots x_{k+1}=1$. 若 $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}$，①式显然取等号. 否则 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$ 中至少有一个大于 1，一个小于 1，不妨设 $x_1>1$，$x_{k+1}<1$. 令 $y_1=x_1x_{k+1}$，那么 $y_1x_2x_3\cdots x_k=1$. 由归纳假设，有 $y_1+x_2+\cdots+x_k\geqslant k$，又

$$\begin{aligned}x_1+x_{k+1}-y_1&=x_1+x_{k+1}-x_1x_{k+1}\\&=-(x_1-1)(x_{k+1}-1)+1>1.\end{aligned}$$

故

$$x_+x_2+\cdots+x_{k+1}>k+1.$$

当 $n=k+1$ 时，①成立.

综上所述，对一切自然数 n，①式成立.

(2) 添项. 特别是添“1”于乘积中是运用平均值不等式的一种重要技巧.

2. 柯西不等式

(1) 设有非零实数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及实数组 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，则

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_1^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_1^2+\cdots+b_n^2). \qquad ①$$

当且仅当 $b_i=\lambda a_i(i=1,2,\cdots,n)$时等号成立.

以上不等式称柯西不等式. 证明如下：

构造二次函数

$$f(x)=(a_1^2+a_1^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_1^2+\cdots+b_n^2),$$

因为 $a_1^2+a_1^2+\cdots+a_n^2>0$，且

$$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2\geqslant 0,$$

所以

$$4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant 0,$$

即得

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

当且仅当 $a_ix+b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，即 $a_i=\lambda b_i$ 时取等号.

(2) ①中取 $b_1=b_2=\cdots=b_n=1$，即得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqslant n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).$$

(3) 在平均值不等式和柯西不等式中可引入参数，如

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant[(\lambda_1a_1)^2+(\lambda_2a_2)^2+\cdots+(\lambda_na_n)^2][(\lambda_1^{-1}b_1)^2+(\lambda_2^{-1}b_2)^2+\cdots+(\lambda_n^{-1}b_n)^2].$$

结合待定系数法，使平均值不等式和柯西不等式的运用更具活力.

3. 排序不等式

(1) 设有两组数 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$，满足

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,$$
$$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n,$$

则有

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\leqslant a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+\cdots+a_nb_{t_n}\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

其中 $\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$.

以上即排序不等式,也可简称

$$\text{反序和} \leqslant \text{乱序和} \leqslant \text{同序和}.$$

证明 (ⅰ)因为

$$(a_n - a_k)(b_n - b_{t_n}) \geqslant 0 \quad (t_n < n, k < n),$$

所以
$$a_n b_n + a_k b_{t_n} \geqslant a_k b_n + a_n b_{t_n}.$$

若 $b_{t_k} = b_n (k < n)$,根据上式有

$$a_1 b_{t_1} + a_2 b_{t_2} + \cdots + a_k b_{t_k} + \cdots + a_n b_{t_n}$$
$$\leqslant a_1 b_{t_1} + a_2 b_{t_2} + \cdots + a_k b_{t_n} + \cdots + a_n b_n.$$

又若 $b_{t_r} = b_{n-1}(r < n-1)$,同样有

$$a_1 b_{t_1} + a_2 b_{t_2} + \cdots + a_r b_{t_r} + \cdots + a_{k+1} b_{t_{k+1}} + \cdots + a_n b_{t_n}$$
$$\leqslant a_1 b_{t_1} + a_2 b_{t_2} + \cdots + a_r b_{t_{n-1}} + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n.$$

继续下去,即得上述右端不等式.

(ⅱ)因 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$,故有

$$-b_1 \geqslant -b_2 \geqslant -b_3 \geqslant \cdots \geqslant -b_n.$$

由①知

$$(-b_n)a_1 + (-b_{n-1})a_2 + \cdots + (-b_1)a_n$$
$$\geqslant (-b_{t_1})a_1 + (-b_{t_2})a_2 + \cdots + (-b_{t_n})a_n.$$

两端同除以 -1,即得上述左端不等式.

(2) 排序不等式在不等式证明中也占有重要地位,和柯西不等式十分相似,它的使用首先在于能根据需要,合理地构造出两组适当的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$.

4. 含绝对值不等式

(1) 对于实数 a,有 $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

(2) 对于实数 a, b,有 $|a| - |b| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$. 当且仅当 a, b 同号或 a, b 中有一为零时右端不等式取等号;当且仅当 $|a| \geqslant |b|$ 且 a, b 异号或 b 为零时左端不等式取等号.

推论 1 对于实数 $a_i (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$,有

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

推论 2 对于实数 a,b,有

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

例题精讲

例 1 若 $a>b>0$,求证:

$$\sqrt{2}a^3+\frac{3}{ab-b^2}\geqslant 10,$$

并确定式中等号成立的条件.

证明 因为 $a>b>0$,所以 $a-b>0$,根据平均值不等式,有

$$ab-b^2=b(a-b)\leqslant\left(\frac{b+a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4},$$

所以

$$\frac{3}{ab-b^2}\geqslant\frac{12}{a^2}, \qquad ①$$

从而

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}a^3+\frac{3}{ab-b^2}\\&\geqslant\sqrt{2}a^3+\frac{12}{a^2}\\&=\frac{a^3}{\sqrt{2}}+\frac{a^3}{\sqrt{2}}+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}\\&\geqslant 5\sqrt[5]{\left(\frac{a^3}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{4}{a^2}\right)^3}=10.\end{aligned} \qquad ②$$

①,②同时成立的充要条件是

$$\begin{cases}b=a-b,\\ \dfrac{a^3}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{a^2}.\end{cases}$$

成立,即当且仅当 $a=\sqrt{2}$,$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,不等式取等号.

例 2 若 $a>1, n\in \mathrm{N}$，求证：

$$\frac{a^{n+1}-a^{-(n+1)}}{a^n-a^{-n}}>\frac{n+1}{na}. \qquad ①$$

证明 因 $a>1$，故①等价于

$$\frac{na}{n+1}[a^{n+1}-a^{-(n+1)}]>a^n-a^{-n},$$

也就是

$$\frac{na^{n+2}+a^{-n}}{n+1}>a^n. \qquad ②$$

$$②式左端=\frac{1}{n+1}[\underbrace{a^{n+2}+a^{n+2}+\cdots+a^{n+2}}_{n个}+a^{-n}]$$

$$>\sqrt[n+1]{\underbrace{a^{n+2}a^{n+2}\cdots a^{n+2}}_{n个}\cdot a^{-n}}$$

$$=\sqrt[n+1]{a^{n(n+2)}\times a^{-n}}=a^n.$$

所以，不等式②成立，原不等式得证.

例 3 求证，对任意自然数 n，有

$$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}<3, \qquad ①$$

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}>2, \qquad ②$$

证明 ①式左端幂中添加因子 1，有

$$1\cdot(1+\frac{1}{n})^n<\left[\frac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1}\right]^{n+1}.$$

化简，即得

$$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}. \qquad ③$$

③式也说明了 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 随 n 递增.

把 $n+1$ 拆成$\frac{5}{6}$和 n 个$\left(1+\frac{1}{6n}\right)$，根据平均值不等式，有

$$1=\frac{\frac{5}{6}+n(1+\frac{1}{6n})}{n+1}>\sqrt[n+1]{\frac{5}{6}(1+\frac{1}{6n})^n},$$

化简得 $$(1+\frac{1}{6n})^n<\frac{6}{5},$$

进而 $$(1+\frac{1}{6n})^{6n}<(\frac{6}{5})^6<3.$$

由 x_n 的单调性，知

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}<3.$$

同样，有

$$1\cdot(\frac{n}{n+1})^{n+1}<\left[\frac{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}}{n+2}\right]^{n+2},$$

化简得 $$(\frac{n}{n+1})^{n+1}<(\frac{n+1}{n+2})^{n+2},$$

从而 $$(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}<(\frac{n+1}{n})^{n+1},$$

所以 $$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}.$$

又 $$1=\frac{2+(n+2)\cdot\frac{n+1}{n+2}}{n+3}>\sqrt[n+3]{2(\frac{n+1}{n+2})^{n+2}},$$

有 $$2(\frac{n+1}{n+2})^{n+2}<1,$$

从而 $$(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}>2,$$

综上所述，不等式①，②得证.

例 4 设 x, y, z, w 是四个不全为零的实数. 求证：$\frac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}\leqslant\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

证明 对于 $\alpha,\beta,\upsilon\in\mathbf{R}^+$，有

$$\alpha^2x^2+y^2\geqslant 2\alpha xy,$$
$$\beta^2y^2+z^2\geqslant 2\beta yz,$$
$$\upsilon^2z^2+w^2\geqslant 2\upsilon zw,$$

即

$$\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{y^2}{2\alpha}\geqslant xy,$$

$$\beta y^2+\frac{z^2}{\beta}\geqslant 2yx,$$

$$\frac{\upsilon}{2}z^2+\frac{w^2}{2\upsilon}\geqslant zw.$$

将上述不等式左右两端分别相加,整理得

$$\frac{\alpha}{2}x^2+\left(\frac{1}{2\alpha}+\beta\right)y^2+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\upsilon}{2}\right)z^2+\frac{w^2}{2\upsilon}$$
$$\geqslant xy+2yz+zw.$$

令
$$\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\alpha}+\beta=\frac{1}{\beta}+\frac{\upsilon}{2}=\frac{1}{2\upsilon},$$

解得
$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

从而,有
$$\frac{\sqrt{2}+1}{2}(x^2+y^2+z^2+w^2)\geqslant xy+2yz+zw.$$

两边同除以 $x^2+y^2+z^2+w^2$,即得所要证明的不等式.

例 5 已知实数 a,b,c,d 满足

$$a+b+c+d=3,$$
$$a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5,$$

求证:$1\leqslant a\leqslant 2$.

证明 依题设,有

$$b+c+d=3-a, \quad ①$$
$$2b^2+3c^2+6d^2=5-a^2. \quad ②$$

根据柯西不等式,有

$$(2b^2+3c^2+6d^2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\geqslant(b+c+d)^2,$$

即
$$2b^2+3c^2+6d^2\geqslant(b+c+d)^2. \quad ③$$

①,②代入③得,

$$5-a^2\geqslant(3-a)^2,$$

解得 $1\leqslant a\leqslant 2$.

例 6 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$且 $x_1+x_2\cdots+x_n=1,n\in\mathrm{N},n\geqslant 2$.求证:

$$x_1x_2(x_1+x_2)+x_1x_3(x_1+x_3)+\cdots x_1x_n(x_1+x_n)$$
$$+x_2x_3(x_2+x_3)+\cdots+x_{n-1}x_n(x_{n-1}+x_n)\leqslant\frac{1}{4}. \quad ①$$

证明 ①式左端记为 A,则

$$\begin{aligned}A&=x_1^2(x_2+x_3+\cdots+x_n)+x_2^2(x_1+x_3+\cdots+x_n)+\cdots+x_n^2(x_1\\&\quad+x_2+\cdots+x_{n-1})\\&=x_1^2[(x_1+x_2+\cdots+x_n)-x_1]+x_2^2[(x_1+x_2+\cdots+x_n)-x_2]\\&\quad+\cdots+x_n^2[(x_1+x_2+\cdots+x_n)-x_n].\end{aligned}$$

因为 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$,所以

$$\begin{aligned}A&=x_1^2(1-x_1)+x_2^2(1-x_2)+\cdots+x_n^2(1-x_n)\\&=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3).\end{aligned} \quad ②$$

对于 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,根据柯西不等式,有

$$\begin{aligned}&(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\&\geqslant(x_2^{\frac{3}{2}}\cdot x_1^{\frac{1}{2}}+x_1^{\frac{3}{2}}\cdot x_2^{\frac{1}{2}}+\cdots+x_n^{\frac{3}{2}}\cdot x_n^{\frac{1}{2}})^2\\&=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2.\end{aligned} \quad ③$$

由②,③,有

$$\begin{aligned}A&\leqslant(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2\\&=-[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-\frac{1}{2}]^2+\frac{1}{4}\\&\leqslant\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

这里,若让 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中两数分别为$\frac{1}{2}$,其余各数为0,即可取得等号.深入研究还可发现仅有此类情形上式取等号.这一点留给读者思考.

例 7 (1) 设三个正数 a,b,c 满足

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4),$$

求证：a,b,c 一定是某个三角形的三边长.

(2) 设 n 个正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_2^4+a_2^4+\cdots+a_n^4),$$

其中 $n>3$.求证：这 n 个数中的任何三个一定是某个三角形的边长.

分析 (1) 实际是(2) 的提示，只要将四次齐次对称多项式进行分解即可证明.对于(2)，考虑到对称性.只须证明 a_1,a_2,a_3 满足(1)中不等式即可.为此，可尝试把 $a_1^2+a_2^2+a_3^2$ 拆分成两项：$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2},\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}$，利用题设不等式及柯西不等式有

$$\begin{aligned}&(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)\\&<(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2\\&=\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+\cdots+a_n^2\right)^2\\&\leqslant(n-1)\left[(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2})^2+(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2})^2+a_4^4+\cdots+a_n^4\right],\end{aligned}$$

因而得到 $2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)<(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2.$

若利用含参数 $\lambda(>0)$的柯西不等式，则有

$$\begin{aligned}&(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)\\&<(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2\\&=[\lambda(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot\frac{1}{\lambda}+a_4^2+a_5^2+\cdots+a_n^2]^2\\&\leqslant[\lambda^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2+a_4^4+\cdots+a_n^4](\frac{1}{\lambda^2}+n-3).\end{aligned}\qquad①$$

为了将 $a_4,a_5,\cdots,a_n$ 从不等式中消去，令

$$\frac{1}{\lambda^2}+n-3=n-1,$$

解得 $\lambda^2=\frac{1}{2}$，代入①得

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4).$$

例 8 设集合$\{a_1,a_2\cdots a_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$.求证:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\leqslant\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

证明 将 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$自小到大排序,不妨设为

$$1\leqslant c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}\leqslant n. \qquad ①$$

又将 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 自小到大排序,有

$$1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_{n-1}\leqslant n.$$

由此可得 $$1\geqslant\frac{1}{b_1}>\frac{1}{b_2}>\cdots>\frac{1}{b_{n-1}}\geqslant\frac{1}{n}. \qquad ②$$

根据排序不等式,由①,②可得

$$\begin{aligned}&\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\\ \geqslant&\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{b_{n-1}}\\ \geqslant&1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}+\cdots+(n-1)\cdot\frac{1}{n}\\ =&\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

例 9 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$.求证:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$$

证明 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$.则 $\frac{1}{bc}\geqslant\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{ab}$.根据排序不等式有

$$\begin{aligned}\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}&=\frac{a^5}{b^3c^3}+\frac{b^5}{c^3a^3}+\frac{c^5}{a^3b^3}\\ &\geqslant\frac{a^5}{a^3c^3}+\frac{b^5}{a^3b^3}+\frac{c^5}{b^3c^3}\\ &=\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{a^2}{a^3}+\frac{b^2}{b^3}+\frac{c^2}{c^3}$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

例 10 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为两两不等的正整数,求证:对任何正整数 n,下列不等式成立:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

证明 对于任意给定的正整数 n,将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 按从小到大的顺序排列为 $a'_1\leqslant a'_2\leqslant\cdots\leqslant a'_n$. 注意到 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)^2}<\cdots<\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1^2}$,根据排序不等式,有

$$a_1'\cdot\frac{1}{1^2}+a_2'\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+a_n'\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$\leqslant a_1\cdot\frac{1}{1^2}+a_2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{n^2}. \qquad ①$$

又 $a_k'\geqslant k(k=1,2,\cdots,n)$,故

$$\frac{a_1'}{1^2}+\frac{a_2'}{2^2}+\cdots+\frac{a_n'}{n^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \qquad ②$$

由①,②即得 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

例 11 函数 $f(x)$在$[0,1]$上有定义. $f(0)=f(1)$. 如果对于任意不同的 $x_1,x_2\in[0,1]$,都有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|,$$

求证:$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

证明 $x_1=x_2$ 时结论是明显的. 不妨设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$.

(i) 若 $x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$,那么

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2},$$

不等式成立.

(ⅱ) 若 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$,则由 $f(0)=f(1)$,可得

$$\begin{aligned}|f(x_2)-f(x_1)|&=|f(1)-f(x_2))+(f(x_1)-f(0))|\\&\leqslant|f(1)-f(x_2)|+|f(x_1)-f(0)|\\&<|1-x_2|+|x_1-0|\\&=1-(x_2-x_1)<\frac{1}{2},\end{aligned}$$

不等式成立.

例 12 设 $a_i,x_i\in\mathrm{R}(i=1,2,\cdots,n)$, $a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $b=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,且

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$
$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=1.$$

求证:$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{1}{2}(a-b)$.

证一 不妨设 $a_1=a$, $a_n=b$. 依题设,有

$$a_1x_1+a_1x_2+\cdots+a_1x_n=a_1(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0,$$
$$a_nx_1+a_nx_2+\cdots+a_nx_n=a_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0,$$

所以

$$\begin{aligned}&|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\\=&\frac{1}{2}|2(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)-a_1(x_1+x_2+\cdots+\\&x_n)-a_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)|\\=&\frac{1}{2}|(2a_1-a_1-a_n)x_1+(2a_2-a_1-a_n)x_2+\cdots+\\&(2a_n-a_1-a_n)x_n|\\\leqslant&\frac{1}{2}[|2a_1-a_1-a_n|\cdot|x_1|+|2a_2-a_1-a_n|\cdot|x_2|+\cdots+\\&|2a_n-a_1-a_n|\cdot|x_n|].\end{aligned}$$

①

根据①,只须证明

$$|2a_i - a_1 - a_n| \leqslant a_1 - a_n \quad (i=1,2,\cdots,n). \qquad ②$$

因若②成立,将②代入①,即有

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(a_1 - a_n)[|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|] = \frac{1}{2}(a - b).$$

②式不难证明.因 $a_n \leqslant a_i \leqslant a_1$,故

$$2a_i - a_1 - a_n = 2(a_i - a_n) - (a_1 - a_n) \geqslant -(a_1 - a_n), \qquad ③$$

$$2a_i - a_1 - a_n = 2(a_i - a_1) + (a_1 - a_n) \leqslant a_1 - a_n. \qquad ④$$

由③,④即得②.

证二 由题设易知,$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有正数也有负数,为便于估计,将其中的非负数与负数分别集中在一起,记 $A = \sum\limits_{x_i \geqslant 0} x_i$, $B = \sum\limits_{x_i < 0} x_i$,于是有

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A - B = 1. \end{cases}$$

解之,得 $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$.

若 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant 0$,则当 $x_i \geqslant 0$ 时,$a_1x_i \geqslant a_ix_i$;当 $x_i < 0$ 时,$a_nx_i \geqslant a_ix_i$,所以

$$\begin{aligned} & |a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \\ &= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ &\leqslant \sum_{x_i \geqslant 0} a_1x_i + \sum_{x_i < 0} a_nx_i \\ &= a_1A + a_nB \\ &= \frac{1}{2}(a_1 - a_n) = \frac{1}{2}(a - b). \end{aligned}$$

若 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n < 0$,可类似证明.

练 习 五

1. 设 a,b,c 为非负数,证明:

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.$$

2. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证:

$$abc \geqslant (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

3. 设 $x+y+z=0$,求证:

$$6(x^3+y^3+z^3)^2 \leqslant (x^2+y^2+z^2)^3.$$

4. 设 $n\in\mathbf{N}(n\neq 1)$,证明:

$$n[(1+n)^{\frac{1}{n}}-1] < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

5. 设 x,y,z 为不全为零的实数,求证:

$$xy+2yz+2zx \leqslant \frac{\sqrt{33}+1}{4}(x^2+y^2+z^2).$$

6. 设 $a_1a_2,\cdots,a_n$; $b_2,b_2,\cdots,b_n$ 都是正实数,且

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1.$$

求证:$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geqslant \frac{1}{2}$.

7. 设 $x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)(n\geqslant 2)$,且

$$A+\sum_{i=1}^{n}x_i^2 < \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2,$$

求证:$A<2x_ix_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$.

8. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正实数,求证:

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)} \leqslant \frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2}.$$

9. 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,实数 α,β 满足 $\alpha\beta>0$,求证:

$$\frac{x_1^\beta}{x_2^\alpha}+\frac{x_2^\beta}{x_3^\alpha}+\cdots+\frac{x_{n-1}^\beta}{x_n^\alpha}+\frac{x_n^\beta}{x_1^\alpha} \geqslant x_1^{\beta-\alpha}+x_2^{\beta-\alpha}+\cdots+x_n^{\beta-\alpha}.$$

10. 设 $a,b,c\in \mathbf{R}^{+}$,求证:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}.$$

11. 设$\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant 1, a_i\geqslant 0, 0\leqslant b_i\leqslant p(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2)$

$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1$,求证:

$$b_1a_2a_3\cdots a_n+b_2a_1a_3\cdots a_n+\cdots+b_na_1a_2\cdots a_{n-1}\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}.$$

12. 已知$|x-a|<\frac{N}{2M},|y-b|<\frac{N}{2|a|},|y|<M$.

求证:$|xy-ab|<N$.

13. 设 $Ax^2+Bx+C=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2), H=\max\{|A|,|B|,|C|\}, h_1=\max\{|a_1|,|b_1|\}, h_2=\max\{|a_2|,|b_2|\}$. 求证:

$\frac{h_1h_2}{2}\leqslant H\leqslant 2h_1h_2$.

14. 设$f(x),g(x)$是$[0,1]$上的实值函数,求证:存在 $x_0,y_0\in[0,1]$,使$|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|\geqslant\frac{1}{4}$.

15. 已知$\{a_1,a_2,\cdots,a_{1992}\}=\{1,2,\cdots,1992\}$. 求证:

$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{1991}-a_{1992}|+|a_{1992}-a_1|$

$\leqslant 1984032$.

第六讲　含参变数的不等式的讨论

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 解不等式

解不等式要注意同解原理的运用及变形的等价性.要善于运用化归思想,利用换元等手法将不等式化为基本的整式不等式.

(1) 解高次不等式

设一元多项式 $f(x)$ 可以在实数范围内分解成一次或二次因式之积.首先可将恒不为零的二次因式在不等式两边约去,将原不等式变为与它同解的不等式,不妨设为

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)>0(\text{或}<0).$$

若有重根,可将偶次因式约去,单独考虑根是否为不等式的解.将 $f(x)=0$ 的 n 个不同的根标列在数轴上,将数轴分成 $n+1$ 个区间,从右向左,从上向下依次穿过 n 个根对应的点画一条连续波浪线,则在数轴上方的曲线对应的点的区间的并为 $f(x)>0$ 的解集,在数轴下方的曲线对应的点的区间的并为 $f(x)<0$ 的解集.

(2) 解分式不等式:

(ⅰ) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$;

(ⅱ) $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$;

(ⅲ) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant 0,\\ g(x)\neq 0;\end{cases}$

(ⅳ) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant 0,\\ g(x)\neq 0.\end{cases}$

(3) 解含绝对值的不等式的关键在于按零点分区间讨论或进行平方运算转化为等价的不含绝对值的不等式(组).

2. 含参数的不等式的讨论

含参数的不等式的成立普遍地与参变数的取值相关联，相当一部分有关的竞赛题呈现“开放性”，其中有一些问题的实质是求最大(小)值. 问题的解决常需要综合运用特殊到一般、数形结合、逻辑类分等思想，灵活地使用函数的性质、不等式的基本性质及重要不等式和各种变换技巧，自己去寻找、判断猜测结论，再行论证. 理顺逻辑关系，审清题意是问题解决的重要条件.

例 题 精 讲

例1 已知当 $x\in[0,1]$时，不等式

$$x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$$

恒成立，试求 θ 的取值范围.

分析一 记 $f(x)=x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta$，依题设，有 $f(0)>0,f(1)>0$，故 $\sin\theta>0,\cos\theta>0$，所以

$$2k\pi<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k\in Z).\qquad ①$$

又 $$f(x)=(1+\sin\theta+\cos\theta)x^2-(2\sin\theta+1)x+\sin\theta,\qquad ②$$

由①知 $1+\sin\theta+\cos\theta>0,0<\dfrac{2\sin\theta+1}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}<1$，所以欲 $f(x)>0$ 恒成立，须且只须在①成立的前提下，②的判别式

$$\Delta=(2\sin\theta+1)^2-4(1+\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta<0,$$

即 $$\sin2\theta>\frac{1}{2}.\qquad ③$$

由③解得 $$k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z).\qquad ④$$

由①,④得 $2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$，即为所求.

分析二 $$f(0)>0\Leftrightarrow\sin\theta>0,\qquad ⑤$$

$$f(1)>0\Leftrightarrow\cos\theta>0,\qquad ⑥$$

当 $x\in(0,1)$时，若 $\sin\theta>0,\cos\theta>0$，则有

$$f(x)=[\sqrt{\cos\theta}x-\sqrt{\sin\theta}(1-x)]^2+(-1+2\cdot\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta})$$
$$x(1-x) \qquad ⑦$$

注意到$\sqrt{\cos\theta}x=\sqrt{\sin\theta}(1-x)$，即 $x=\dfrac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}}\in(0,1)$时，欲$f(x)>0$恒成立，须且只须

$$-1+2\sqrt{\sin\theta\cos\theta}>0 \qquad ⑧$$

$$\Leftrightarrow\sin2\theta>\frac{1}{2}. \qquad ⑨$$

由⑤，⑥，⑨解得 $2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$.

又由上述推导可知，当 $2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$时，⑤，⑥，⑧成立，进而，$x\in(0,1)$时由⑦知 $f(x)>0$，故 $2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$为所求.

分析三 $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$

$$\Leftrightarrow x^2\cos\theta+(1-x)^2\sin\theta>x(1-x). \qquad ⑩$$

如前所述，有⑤，⑥. 又当 $x\in(0,1)$时，$x>0,1-x>0$，则

$$x^2\cos\theta+(1-x)^2\sin\theta\geqslant2x(1-x)\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta}. \qquad ⑪$$

当 $x\sqrt{\cos\theta}=(1-x)\sqrt{\sin\theta}$时上式取等号. 欲使⑩恒成立，须

$$2x(1-x)\sqrt{\sin\theta}\cdot\sqrt{\cos\theta}>x(1-x).$$

$$\Leftrightarrow2\sqrt{\sin\theta}\cdot\sqrt{\cos\theta}>1.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\theta>0,\\ \cos\theta>0,\\ \sin2\theta>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

解之，得 $2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$.

由上述推导可知，当 $2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$时⑤，⑥，⑩

恒成立,故为所求.

例 2 已知不等式组

$$\begin{cases}2b\sin^2(x+y)\geqslant -b+4b^3\sin(x+y)+b^3, & ①\\ x^2+(b^4+1)y^2+b>2xy & ②\end{cases}$$

对于任意的实数 x,y 成立,求 b 的所有值.

解 ②可变为 $(x-y)^2+b^4y^2>-b$. ③

当 $b>0$ 时,③式方恒成立.设 $t=\sin(x+y)$,则 $t\in[-1,1]$,且①式可变为

$$2bt^2-4b^3t+b-b^3\geqslant 0.$$

令 $f(t)=2bt^2-4b^3t+b-b^3(b>0,t\in[-1,1])$,则$f(t)\geqslant 0$.因

$$f(t)=2b(t-b^2)^2-2b^5-b^3+b,$$

故分两种情形:

(i) $0<b^2\leqslant 1$ 时,

$$f(b^2)=-2b^5-b^3+b\geqslant 0, \quad ④$$

注意到 $b>0$,由④解得 $0<b\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ii) $b^2>1$ 时,

$$f(1)=2b-4b^3+b-b^3=-5b^3+3b\geqslant 0,$$

因 $b>0$,故 $b^2\leqslant\frac{3}{5}$,矛盾.

综上所述,$0<b\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$为所求.

例 3 设 a,b,c 是直角三角形的三边,且 c 为斜边,求最大常数 M,使得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{M}{a+b+c}.$$

解 问题等价于求

$$f(a,b,c)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)$$

的最小值.

不妨设 $a\leqslant b$. 考虑关于 c 的函数 $g(c)=\frac{1}{c}+\frac{c}{ab}$，注意到 $c=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\sqrt{2ab}$，故易证 $g(c)$是严格递增函数，有

$$f(a,b,c)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+(a+b)\left(\frac{1}{c}+\frac{c}{ab}\right)$$

$$\geqslant 3+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{ab}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2ab}}+\frac{\sqrt{2ab}}{ab}\right)$$

$$=5+3\sqrt{2}.$$

当且仅当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号. 故 $M_{\max}=5+3\sqrt{2}$.

例 4 已知 λ 为正常数，求最大的常数 c，使对任意非负实数 x_1,x_2 有

$$x_1^2+x_2^2+\lambda x_1x_2\geqslant c(x_1+x_2)^2.$$

解 (i) 若 $\lambda\geqslant 2$，则

$x_1^2+x_2^2+\lambda x_1x_2\geqslant x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2$.

当 $c\leqslant 1$ 时题设不等式恒成立，又 $c>1$，取 $x_1=1$，$x_2=0$，题设不等式不能成立，故 $c=1$ 为所求.

(ii) 若 $0<\lambda<2$，取 $x_1=x_2=1$，由题设不等式可得 $c\leqslant\frac{2+\lambda}{4}$.

又当 $c=\frac{2+\lambda}{4}$时，有

$$x_1^2+x_2^2+\lambda x_1x_2-\frac{2+\lambda}{4}(x_1+x_2)^2$$

$$=\frac{2-\lambda}{4}(x_1-x_2)^2\geqslant 0.$$

故 $c=\frac{2+\lambda}{4}$为所求.

综上所述，$c=\begin{cases}\frac{2+\lambda}{4} & (0<\lambda<2),\\ 1 & (\lambda\geqslant 2).\end{cases}$

例 5 设 $x+y=k$. $x,y\in\mathbf{R}^{+}$,试求 k 的取值范围,使不等式

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\geqslant\left(\frac{k}{2}+\frac{2}{k}\right)^{2} \quad ①$$

恒成立.

解 当 $x=y$ 时,①式恒成立. 此时 k 可为任意正数. 当 $x\neq y$ 时,不妨设 $x>y$. 令 $m=\frac{k}{2}$, $x=m+t$, $y=m-t$,这里 $0<t<m$. 于是①式可写为

$$\left(m+t+\frac{1}{m+t}\right)\left(m-t+\frac{1}{m-t}\right)\geqslant\left(m+\frac{1}{m}\right)^{2}.$$

化简,得 $$t^{2}\geqslant\frac{m^{4}-4m^{2}-1}{m^{2}}. \quad ②$$

再次注意到 $t>0$,故欲使②恒成立,当且仅当

$$\frac{m^{4}-4m^{2}-1}{m^{2}}\leqslant 0,$$

即 $$m^{2}\leqslant 2+\sqrt{5}.$$

综上所述,有 $0<m\leqslant\sqrt{2+\sqrt{5}}$,从而 $0<k\leqslant 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 即为所求.

例 6 证明:对每个 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的 x. 适合 $\left|\sqrt{1-x^{2}}-px-q\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 的惟一实数对 (p,q) 是 $\left(-1,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

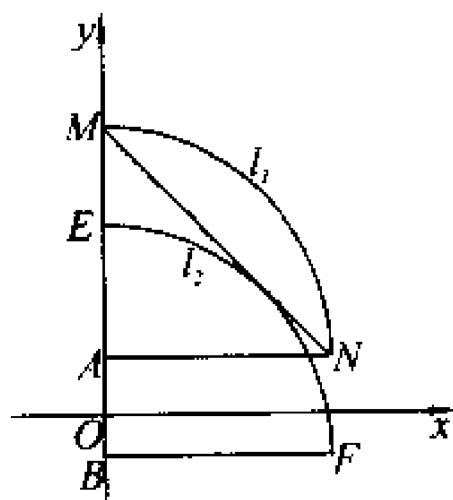


图 6-1

证明 $$\left|\sqrt{1-x^{2}}-px-q\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-x^{2}}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\leqslant px+q$$

$$\leqslant\sqrt{1-x^{2}}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}. \quad ①$$

分别以点 $A\left(0,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$、$B\left(0,-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ 为圆心,1 为半径作两个圆,并

记圆 A 的以 $M(0,\frac{\sqrt{2}+1}{2})$, $N(1,\frac{\sqrt{2}-1}{2})$ 为端点且位于第一象限的弧为 l_1, l_1 即 $y=\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\quad x\in[0,1]$ 的图象. 记圆 B 的以 $E(0,\frac{3-\sqrt{2}}{2})$, $F(1,-\frac{\sqrt{2}-1}{2})$ 为端点且位于第一、四象限的弧为 l_2, l_2 即 $y=\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\quad x\in[0,1]$ 的图象. 而函数 $y=px+q\quad x\in[0,1]$ 的图象为直线段(如图 6-1). 注意到连接 l_1 的两端点线段 MN 与弧 l_2 相切于点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$, 故满足①的实数对是 $(-1,\frac{\sqrt{2}+1}{2})$, 是惟一的.

有些问题难以从直接变化中寻得结论,需要先投石问路,取特殊值或从极端情形入手,确定具体目标,再行论证.

例 7 试求最小实数 a,使得不等式

$$a(x^2+y^2+z^2)+xyz\geqslant\frac{a}{3}+\frac{1}{27} \qquad ①$$

对一切满足 $x,y,z\geqslant0$, $x+y+z=1$ 的实数 x,y,z 成立.

分析 令 $x=y=\frac{1}{2}$, $z=0$, 则由①得

$$\frac{a}{2}\geqslant\frac{a}{3}+\frac{1}{27},$$

解得 $a\geqslant\frac{2}{9}$.

下面再证明 a 的最小值为 $\frac{2}{9}$, 即证

$$\frac{2}{9}(x^2+y^2+z^2)+xyz\geqslant\frac{1}{9},$$

也就是 $$2(x^2+y^2+z^2)+9xyz\geqslant1 \qquad ②$$

成立.

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant0$, 因 $x+y+z=1$, 故②等价于

$$2(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)+9xyz\geqslant(x+y+z)^3,$$

即 $(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x+y^2x+z^2y+x^2z)+3xyz\geqslant 0.$ ③

③可变为

$$[2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x+y^2x+z^2y+x^2z)]-(x^2y+y^2z+z^2x+y^2x+z^2y+x^2z-6xyz)\geqslant 0. \quad ④$$

因

$$x^3+y^3-x^2y-y^2x=(x-y)^2(x+y),$$
$$x^2y-2xyz+z^2y=y(x-z)^2,$$

所以,④式等价于

$$(x-y)^2(x+y)+(y-z)^2(y+z)+(z-x)^2(z+x)-[z(x-y)^2+x(y-z)^2+y(x-z)^2]\geqslant 0,$$

即 $(x-y)^2(x+y-z)+(y-z)^2(y+z-x)+(z-x)^2(z+x-y)\geqslant 0.$ ⑤

⑤式左边$\geqslant (x-z)^2(x+z-y)+(y-z)^2(y+z-x)$
$\geqslant (y-z)^2(x+z-y)+(y-z)^2(y+z-x)$
$=(y-z)^2\cdot 2z\geqslant 0.$

故不等式①成立,从而 $a=\frac{2}{9}$ 为所求.

对于②可以根据对称性另辟蹊径.

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,则 $0\leqslant z\leqslant\frac{1}{3}$,从而

$$\begin{aligned}&2(x^2+y^2+z^2)+9xyz\\&=2[(x+y)^2+z^2-2xy]+9xyz\\&=2[(1-z)^2+z^2]+9xy(z+\tfrac{4}{9}).\end{aligned} \quad ⑥$$

固定 z,那么⑥式当且仅当 $x=y=\frac{1-z}{2}=t$ 时取最小值,所以只须证明:当 $t\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$时,

$$2[t^2+t^2+(1-2t)^2]+9t^2(1-2t)\geqslant 1,$$

即 $(2t-1)(3t-1)^2\leqslant 0$ ⑦

成立,这是显然的.

例 8 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实数,试求不等式

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)$$
$$\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2 \qquad ①$$

对于所有非负实数 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 恒成立的充要条件。

分析 先从特殊情形出发,在①中取 $x_1=x_2=\frac{1}{2},x_3=x_4=\cdots=x_n=0$,得

$$a_1+a_2\geqslant 0.$$

同理,有 $$a_i+a_j\geqslant 0 \quad (1\leqslant i\neq j\leqslant n). \qquad ②$$

②是否是①恒成立的充分条件呢？且看

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)$$
$$=a_1x_1^2+a_2x_1x_2+\cdots a_nx_1x_n$$
$$+a_1x_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_2x_n$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_1x_1x_n+a_2x_2x_n+\cdots+a_nx_n^2$$

上式减去$(a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2)$,所得差记为 A,则

$$A=(a_1+a_2)x_1x_2+(a_1+a_3)x_1x_3+\cdots$$
$$+(a_1+a_n)x_1x_n+(a_2+a_3)x_2x_3+\cdots$$
$$+(a_2+a_n)x_2x_n+\cdots+(a_{n-1}+a_n)x_{n-1}x_n. \qquad ③$$

由②、③及 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$为非负实数知 $A\geqslant 0$,说明②为①恒成立的充分条件.

综上所述,②为所求.

例 9 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是给定的不全为零的实数,如果不等式

$$r_1(x_1-a_1)+r_2(x_2-a_2)+\cdots+r_n(x_n-a_n)$$
$$\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

对一切实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 恒成立,试求 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 的值.

解 令 $x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$,有

$$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n\geqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

又令　　$x_i=2a_i(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

故　　$$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n=\sqrt{a_1^2+a_n^2+\cdots+a_n^2}.\qquad ①$$

令　$x_i=r_i(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$r_1(r_1-a_1)+r_2(r_2-a_2)+\cdots+r_n(r_n-a_n)$$

$$\leqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.\qquad ②$$

把①代入②，有

$$r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2\leqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2},$$

即　$$r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2\leqslant 1.\qquad ③$$

根据柯西不等式，有

$$(r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n)^2$$

$$\leqslant(r_1^2+r_2^2+\cdots r_n^2)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).\qquad ④$$

①代入④，即得

$$r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2\geqslant 1.\qquad ⑤$$

由③、⑤得　$$r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2=1.\qquad ⑥$$

④式取等号的条件是 $r_k=\lambda a_k(k=1,2,\cdots n)$，代入⑥得

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}},$$

于是　$$r_i=\frac{a_i}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}(i=1,2,\cdots,n).\qquad ⑦$$

将⑦代入题设不等式，利用④有

$$r_1(x_1-a_1)+r_2(x_2-a_2)+\cdots+r_n(x_n-a_n)$$

$$=(r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n)-(r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n)$$

$$=\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

$$\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

至此，可确定

$$r_i=\frac{a_i}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

即为所求.

练 习 六

一、填空题

1. 满足不等式 $\lg(20-5x^2)>\lg(a-x)+1$ 的 x 的整数值只有 1,则整数 a 的值为______.

2. 已知不等式 $4\leqslant 3\sin^2x-\cos^2x+4\cos x+a^2\leqslant 20$ 对一切实数都成立,则实数 a 的取值范围是______.

3. 已知函数 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty,1]$ 上是减函数,不等式 $f(k-\sin x)\geqslant f(k^2-\sin^2x)$ 对一切实数 x 恒成立,则实数 k 的集合为______.

4. 若对任意实数 x,y,恒有 $2ax^2+2ay^2+4axy-2xy-y^2-2x+1\geqslant 0$,那么实数 a 的值为______.

5. 若不等式 $1-mx\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 对 $x\in[0,1]$ 恒成立. 则 m 的取值范围是______.

6. 已知不等式 $\sqrt{24+2x-x^2}>\sqrt{cx+d}$ 的解为 $-2<x<5$,则 $c+d$ 的值是______.

二、解答题

7. 设任意实数 $x_0>x_1>x_2>x_3>0$,要使

$$\log_{\frac{x_0}{x_1}}2000+\log_{\frac{x_1}{x_2}}2000+\log_{\frac{x_2}{x_3}}2000\geqslant k\cdot\log_{\frac{x_0}{x_3}}2000$$

恒成立,求 k 的最大值.

8. 求所有正整数 n,使得 $\min\limits_{k\in\mathbf{N}}\left(k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]\right)=1991$,这里 $\left[\frac{n}{k^2}\right]$ 表示不超过 $\frac{n}{k^2}$ 的最大整数.

9. 求最大的正常数 k,使得对所有的正常数 a,b,c,有

$$\frac{kabc}{2a+2b+c}\leqslant(a+b)^2+4(a+b+8c)^2.$$

10. 求使不等式组

$$\begin{cases}2m\cos2(x-y)+8m^2\cos(x-y)+8m^2(m+1)+5m<0,\\x^2+y^2+1>2mx+2y+m-m^2\end{cases}$$

对任何实数 x、y 恒成立的 m 的取值范围.

11. 设 A,B,C 是实数,试求使不等式

$$A(x-y)(x-z)+B(y-z)(y-x)+C(z-x)(z-y)\geqslant0$$

对于任何实数 x,y,z 都成立的充要条件.

12. 试求不等式

$$x^2+y^2+z^2\geqslant2xy\cos\alpha+2yz\cos\beta+2zx\cos r$$

对一切实数 x,y,z 恒成立的充要条件.

13. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为自然数,且 $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,试求不等式

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2+2x_1x_2+2x_2x_3+\cdots+2x_{n-1}x_n>0$$

对一切不全为零的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 恒成立的充要条件.

第七讲　不定方程

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 不定方程通常是指未知数个数多于方程的个数，且它们的解受到某种限制的方程(组)．

(1) 在数学竞赛中，不定方程问题通常有三种类型：

(ⅰ) 求不定方程的解；

(ⅱ) 判断不定方程是否有解；

(ⅲ) 判断不定方程的解的数量(有限还是无限)．

(2) 解决不定方程问题常用的方法是：

(ⅰ) 恒等变形．通过因式分解、配方、换元等方法变形方程，使之易于求解．

(ⅱ) 估计．利用不等式缩小对方程中某些未知数取值的探索范围，或以退为进扩大未知数的取值范围，取得突破再过渡到求解．

(ⅲ) 同余处理．运用同余工具处理方程(以后另作专门介绍)．奇偶性分析则是其中的特例．

(ⅳ) 构造．常利用恒等式先构造一些特解，再进一步证明不定方程有解或有无穷多组解．

(ⅴ) 无穷递降法．无穷递降法常用于证明不定方程无正整数解．其主要步骤是从相反的结论出发，假设存在一组正整数解，设法构造出这一方程的另一组正整数解．这新的解中必有其中某个未知数的取值较原来的小．且对于这个未知数而言，上述过程可以无限地进行下去，由于严格递减的正整数数列只可能有有限多项，导致矛盾．

无穷递降法并不只是用于否定方面．如果方程有解那么必有最小正整数解．采取递降法时，经过有限多步必然到达最小解．

2. (1) 二元一次不定方程

$$ax + by = c \qquad a, b, c \in \mathbf{Z}, \tag{①}$$

有整数解的充分必要条件是$(a, b) \mid c$.

证明　必要性　设 x_0, y_0 是①的解,则有

$$ax_0 + by_0 = c.$$

设 $d = (a, b)$. 则有 $d \mid ax_0, d \mid by_0$. 所以 $d \mid c$.

充分性　设 $d = (a, b)$, 且 $d \mid c$, 有 $c = c_1 d$. 因 $d = (a, b)$, 则存在 x_0, y_0, 使得 $d = ax_0 + by_0$, 于是有 $c = c_1 d = a \cdot c_1 x_0 + b \cdot c_1 y_0$, 所以 $c_1 x_0, c_1 y_2$ 是①的解.

(2) 显然, 当①有解时, $d \mid c$. 则用 d 去除①的两端有

$$a_1 x + b_1 y = c_1. \tag{②}$$

此时, $(a_1, b_1) = 1$ 且②与①同解, 因此, 我们只须讨论$(a, b) = 1$ 时方程①的解.

定理　若$(a, b) = 1$, 且 x_0, y_0 为①之一解. 则方程①全部解为

$x = x_0 + bt,\ y = y_0 - at (t \in \mathbf{Z})$.

证明　设 x_0, y_0 为①的一解, 则有

$$ax_0 + by_0 = c. \tag{③}$$

设 x, y 是①的任一解. ① - ③有

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

因为$(a, b) = 1$, 于是有 $b \mid (x - x_0)$, 即 $x - x_0 = bt$. 从而有 $x = x_0 + bt$, 代入上式得 $y = y_0 - at$, 即方程任一解都可表示为 $x = x_0 + bt, y = y_0 - ut (t \in \mathbf{Z})$.

反之, 若 x_0, y_0 是①的解. 则容易验证 $x = x_0 + bt, y = y_0 - at (t \in Z)$ 均是①的解, 从而定理得证.

例 题 精 讲

例 1　求出方程 $25x + 13y + 7z = 4$ 的全部解.

解 先解 $25x+13y=u$ 及 $u+7z=4$. 这两个二元一次不定方程的通解分别是

$$\begin{cases}x=-u+13t_1,\\ y=2u-25t_1,\end{cases}\quad t_1=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\begin{cases}u=-3+7t_2,\\ z=1-t_2,\end{cases}\quad t_2=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

将 $u=-3+7t_2$ 代入 x,y 的表达式,并与 z 的表达式写在一起即得原方程的通解

$$\begin{cases}x=3-7t_2+13t_1,\\ y=-6+14t_2-25t_1,\quad t_1,t_2=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ z=1-t_2.\end{cases}$$

例 2 求方程 $y^2+3x^2y^2=30x^2+517$ 的所有正整数解 (x,y).

解 原方程可变为

$$y^2+3x^2y^2-30x^2-10=507,$$

即
$$(y^2-10)(3x^2+1)=3\times13\times13.$$

由于 $3x^2+1$ 不是 3 的倍数,且大于 1,所以 y^2-10 是 3 的倍数. 注意到 $y^2-10>0$,有 $y^2\geqslant16$. 所以 $y^2-10=39$. $3x^2+1=13$,因此 $x=2$, $y=7$,所求正整数解为 $(2,7)$.

例 3 求方程 $7^x-3\times2^y=1$ 的正整数解.

解 原方程可变为

$$\frac{7^x-1}{7-1}=2^{y-1}.$$

即
$$7^{x-1}+7^{x-2}+\cdots+1=2^{y-1}\tag{①}$$

若 $y=1$,则由原方程知 $x=1$.

若 $y\neq1$,则 x 为偶数,由①可得

$$(7+1)(7^{x-2}+7^{x-4}+\cdots+1)=2^{y-1},$$

即 $7^{x-2}+7^{x-4}+\cdots+1=2^{y-4}$. ②

显然 $x=2,y=4$ 为一组解.

若 $y>4$，再对②式左边分解得

$$(7^2+1)(7^{x-4}+7^{x-8}+\cdots+1)=2^{y-4}. \quad ③$$

因左边有约数 5，但右边不含约数 5，故④不成立.

综上所述，方程①的正整数解 (x,y) 为 $(1,1)(2,4)$.

例 4 求不定方程

$$x^2+y^2+z^2=x^2y^2 \quad ①$$

的整数解.

解 容易看出：若 x,y,z 中有一个为零，则方程有整数解 $x=y=z=0$. 事实上，当 $x=0$ 或 $y=0$ 时结论显然. 现考虑 $z=0$，注意到

$$\begin{aligned} & x^2+y^2=x^2y^2 \\ \Leftrightarrow & (x^2-1)(y^2-1)=1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2-1=1, \\ y^2-1=1; \end{cases} (\text{I}) \text{ 或 } \begin{cases} x^2-1=-1, \\ y^2-1=-1. \end{cases} (\text{II}) \end{aligned}$$

(Ⅰ)无整数解，(Ⅱ)的解为 $x=y=0$. 因此，若①有其他整数解，则 x,y,z 均不为零. 基于①式中 z 的地位特殊，故从 z 出发考虑且只须分析 z 为正数时的情形. 分两种情况：

(i) z 为奇数，原方程可变为

$$(x^2-1)(y^2-1)=z^2+1 \quad ②$$

因为 z^2+1 为偶数，故 x^2-1 与 y^2-1 中到少有一个是偶数. 此时②的左边是 4 的倍数，而右端被 4 除余 2，矛盾，故 z 不是奇数.

(ii) z 为偶数. 此时 z^2+1 为奇数，于是 x^2-1, y^2-1 均为奇数，从而 x,y 同为偶数. 此时 x,y,z 可表示为 $x=2^m a, y=2^n b, z=2^p c$，其中 a,b,c 均为奇数，$m,n,p\geqslant 1$. 原方程可变为

$$2^{2m}a^2+2^{2n}b^2+2^{2p}c^2=2^{2(m+n)}a^2b^2. \quad ③$$

若 $m=n=p$，或 m,n,p 中仅有一个最小的，例如 $m<n\leqslant p$，则用 2^{2m} 遍除③式各项，其结果左端为奇数，右端为偶数. 得出矛盾；若 m,n,p 中不是仅有一个最小，也不全等，则必有一个最大的，例如 $m=n<p$，则用 2^{2m} 遍除③式各项，得

$$a^2+b^2+2^{2(p-m)}c^2=2^{2n}a^2b^2.$$

因 a^2+b^2 被 4 除余 2，$2^{2(p-m)}c^2$ 与 $2^{2n}a^2b^2$ 均为 4 的倍数，仍然矛盾.

综上所述，可知 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 是原方程惟一的整数解.

例 5 求方程 $x+y=x^2-xy+y^2$ 的全部整数解.

解 方程可变为

$$x^2-(y+1)x+y^2-y=0,$$

有 $$\Delta=(y+1)^2-4(y^2-y)\geqslant 0.$$

解之，得 $1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant 1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 整数 y 只可能是 0,1,2. 逐一代入原方程得 $(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(2,1),(1,2),(2,2)$ 共六组.

例 6 求方程

$$x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$$

的整数解.

解 原方程可变为

$$(2x+1)^2=4(y^4+y^3+y^2+y)+1. \quad ①$$

注意到

$$\begin{aligned}4(y^4+y^3+y^2+y)+1&=(2y^2+y+1)^2-y^2+2y\\&=(2y^2+y)^2+3y^2+4y+1,\end{aligned}$$

从而当 $y>2$ 或 $y<-1$ 时. 由①可知

$$(2y^2+y)^2<(2x+1)^2<(2y^2+y+1)^2.$$

由于 $2y^2+y$ 和 $2y^2+y+1$ 是两个连续的整数，它们的平方之间不会含有完全平方数，故上式不成立. 因此只需要考虑当 $-1\leqslant y\leqslant 2$ 时方程的解. 容易得到原方程的全部整数解是 $(x,y)=(0,-1),(-1,-1),(0,0),(-1,0),(-6,2),(5,2)$.

例 7 试求所有的正整数 n，使方程

$$x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$$

有正整数解.

解 设 x,y,z 为其正整数解. 不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$. 显然 $z^2\mid x^3+$

y^3. 故 $z^2 \leqslant x^3 + y^3$. 但 $x^3 \leqslant xz^2$. $y^3 \leqslant yz^2$, 因而

$$z = nx^2y^2 - \frac{x^3+y^3}{z^2} \geqslant nx^2y^2 - (x+y),$$

有 $$x^3 + y^3 \geqslant z^2 \geqslant [nx^2y^2 - (x+y)]^2.$$

于是 $$n^2x^4y^4 \leqslant 2nx^2y^2(x+y) + x^3 + y^3,$$

$$nxy < 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{nx^3} + \frac{1}{ny^3}. \quad ①$$

易知 $x = 1$. 否则, 若 $x_1 \geqslant 2$, 则上式左端不小于 4, 右端不大于 3, 导致矛盾. 这样①可变为

$$y < 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{n} + \frac{1}{ny^3}, \quad ②$$

由②知 $y \leqslant 3$, 注意到 $z^2 \mid 1 + y^3$, 因此只能是 $y = 1, z = 1$ 或 $y = 2, z = 3$, 进而为原方程得 $n = 3$ 或 $n = 1$.

例 8 证明: 方程 $x^2 + y^2 - 19xy - 19 = 0$ 无整数解.

分析 假设 (x, y) 是原方程的一组整数解, 显然 $x \neq 0, y \neq 0$. 进而可知 $19(xy+1) = x^2 + y^2 > 0$, 因此 $xy > -1$, 有 $xy \geqslant 0$, 即 x, y 必须同号. 不妨设 x, y 均为正整数, 且 $x \geqslant y$, 将原方程看成 x 的一元二次方程

$$x^2 - 19xy + (y^2 - 19) = 0. \quad ①$$

若 x 是①的解, 则由韦达定理得 $x' = 19y - x$ 也是①的解. 在 x, y 均为整数时, x' 也是整数, 所以 (x', y) 也是原方程的整数解.

由上述推导可知 x' 与 y 同号, 即 x' 也为正整数. 根据韦达定理得

$$x' = \frac{y^2 - 19}{x} < \frac{y^2}{x} \leqslant y \leqslant x,$$

所以, 由原方程的一组解 (x, y) 可导出它的另一组正整数解 (x', y), 且 $0 \leqslant x' < x$.

如此下去, 原方程将有无穷组的正整数解. 另一方面, x 为一个给定的正整数, 比它小的正整数只能有有限个, 矛盾. 故原方程没有正整数解, 从而也没有整数解.

例 9 证明,对任何自然数 $n \geqslant 3$,数字 2^n 可以表示成 $7x^2+y^2$ 的形式,其中 x 和 y 都是奇数.

证明 (ⅰ) $n=3$ 时,取 $x=y=1$,有 $2^3=8=7+1$,命题成立.

(ⅱ) 假设 $n=k \geqslant 3$ 时,存在奇数 x_0 和 y_0,使得

$$2^k=7x_0^2+y_0^2.$$

令 $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}(x_0+y_0), \\ y_1=\dfrac{1}{2}(7x_0-y_0), \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\dfrac{1}{2}(x_0-y_0), \\ y_2=\dfrac{1}{2}(7x_0+y_0), \end{cases}$ 则 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 均是方程

$$2^{k+1}=7x^2+y^2$$

的解.注意到 $x_i+y_i=4x_0(i=1,2)$,故 x_i 与 y_i 同奇偶,而 $x_1+x_2=x_0$ 为奇数,知 x_1,x_2 中必有奇数.故 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 中一定有一组解同为奇数,不妨设为 (x_1,y_1),那么 (x_1,y_1) 是方程①的一组奇数解.故 $n=k+1$ 时命题成立.

综上所述对一切自然数 $n(\geqslant 3)$ 命题成立.

练 习 七

1. 求出方程 $3x+5y=101$ 的全部非负整数解.

2. 求方程 $x^2+xy+y^2=49$ 的全部正整数解.

3. 证明方程 $x^3+11^3=y^3$ 没有正整数解 (x,y).

4. 试判断方程 $x^2+y^3=z^4$ 是否有素数解.

5. 设整数 x,y 都大于 1,求方程 $x^y=2^z-1$ 的全部正整数解 (x,y,z).

6. 求出所有满足方程

$$5(xy+yz+zx)=4xyz$$

的正整数解 (x,y,z)

7. 证明:没有正整数 x,y 满足

$$x(x+1)=y^2.$$

8. 求方程 $x^6+3x^3+1=y^4$ 的整数解.

9. 证明方程 $x^2+y^5=z^3$ 有无穷多组满足 $xyz\neq 0$ 的整数解.

10. 试找出所有满足等式 $p^q+q^p=r$ 的所有素数p,q 和 r.

11. 证明:对任意 $n\in \mathbf{Z}$,方程 $x^2+y^2-z^2=n$ 有无穷多组正整数解.

12. 确定 m^2+n^2 的最大值,其中 m,n 为整数,且满足 $m,n\in \{1,2,\cdots,1981\}$,$(n^2-mn-m^2)^2=1$.

13. 对于 $n\in \mathbf{N}$,且 $n\geqslant 2$,证明:方程 $x^2+y^2=z^n$ 一定有正整数解.

第八讲　直线方程

知识点和方法述要

1. 解析几何是在坐标系的基础上，用坐标表示点，用方程表示曲(直)线，用代数方法研究几何的一门学科.

2. (1) 有向线段的数量　设 A、B 是数轴上两点，它们的坐标分别为 x_A、x_B，则有向线段 AB 的数量：

$$AB = x_B - x_A.$$

(2) 两点间距离　(i) 设两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，直线 P_1P_2 的倾斜角为 $\alpha\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$，则两点 P_1、P_2 的距离

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \left|\frac{x_1 - x_2}{\cos\alpha}\right|.$$

(ii) 特别地，当 P_1、P_2 在 x 轴上或直线 P_1P_2 平行 x 轴时，两点 P_1、P_2 的距离

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|.$$

当 P_1、P_2 在 y 轴上或直线 P_1P_2 平行 y 轴时，两点 P_1P_2 的距离

$$|P_1P_2| = |y_2 - y_1|.$$

(3) 线段的定比分点　设 $\overline{P_1P_2}$ 的两端点坐标分别为 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}\quad(\lambda \neq -1),$$

则分点 P 的坐标

$$\begin{cases} x_p = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y_p = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases}$$

当 $\lambda>0$ 时，P 为内分点，在有向线段 P_1P_2 上；当 $\lambda<0$ 时，P 为外分点，在有向线段 P_1P_2 的延长线上.

特别地，当 $\lambda=1$，即 P 是线段$\overline{P_1P_2}$的中点时，点 P 的坐标为

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

设三角形顶点是 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$. 则$\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}. \end{cases}$$

3. (1) 直线的斜率　设直线 AB 的倾斜角是 α，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 则 A、B 两点连线的斜率

$$k_{AB}=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2},x_1\neq x_2\right).$$

(2) 直线方程　设直线 l 经过两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，倾斜角是 α，斜率是 k，在 x 轴、y 轴的截距分别是 a，b，则直线方程形式有

(ⅰ) 点斜式　$y-y_1=k(x-x_1)$；

(ⅱ) 斜截式　$y=kx+b$；

(ⅲ) 两点式　$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$；

(ⅳ) 截距式　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$；

(ⅴ) 一般式　$Ax+By+C=0\ (A^2+B^2\neq0)$；

(ⅵ) 参数式　$\begin{cases} x=x_1+t\cos\alpha, \\ y=y_1+t\sin\alpha \end{cases}$　(t 是参数)

或 $$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases} \quad (\lambda \text{ 是参数})$$

4. 两直线的位置关系

(1) 设两直线 l_1, l_2 的斜率分别是 k_1, k_2. 则

(ⅰ) $l_1 /\!/ l_2$ 或重合 $\Leftrightarrow k_1 = k_2$;

(ⅱ) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

(2) 设两直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

(ⅰ) 两直线相交的充要条件: $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ 或 $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.

(ⅱ) 两直线平行的充要条件: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, 或 $A_1B_2 - A_2B_1 = 0, A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$.

(ⅲ) 两直线重合的充要条件: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ 或 $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2 (\lambda \neq 0)$

(ⅳ) 两直线垂直的充要条件: $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

(3) 设两直线 l_1, l_2 的斜率分别是 k_1, k_2, 它们的交角是 θ, 则

(ⅰ) l_1 到 l_2 的交角公式: $\tan\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$;

(ⅱ) l_1 和 l_2 的夹角公式: $\tan\theta = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| \quad (0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$.

5. (1) 点到直线距离　设点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离是 d, 则

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

(2) 两条平行直线间距离　设两条平行直线 $Ax + By + C_1 = 0$ 与 $Ax + By + C_2 = 0$ 间的距离是 d, 则

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

6. 直线系方程

(1) 平行于直线 $Ax+By+C=0$ 的直线系方程是

$$Ax+By+\lambda=0(\lambda\text{ 是实数,下同}).$$

(2) 垂直于直线 $Ax+By+C=0$ 的直线系方程是

$$Bx-Ay+\lambda=0.$$

(3) 过两已知直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程是

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

(其中不包括直线 l_2).

7. (1) 解析几何问题常可一题多解,但处理方式不同,可能繁简大相径庭.因此,要充分考虑到问题的特征,多收集些信息,综观全局,权衡利弊,再决定解题策略.用数研究形是解析几何的本质,然而数形结合,利用图形几何性质常对解题大有裨益.

(2) 对于仅与直线有关,涉及的量中角度距离不多的几何问题来说,采用解析法,通过直线方程求解往往是方便的.不少平面几何题若用纯几何方法论证仅添加辅助线一项就须凭借相当高程度的机敏和丰富的经验.有时虽然费尽心机,仍因不得要领,而以失败告终.解析法的优点就在于解题的整个途径较为清楚,通过计算即可直达目的.

例 题 精 讲

例 1 设动点 P、P' 坐标分别为 (x,y)、(x',y'),它们满足

$$\begin{cases}x'=3x+2y+1,\\y'=x+4y-3,\end{cases}$$

问:P、P' 能否在一条直线上运动?

分析 假若 P、P' 都在直线

$$Ax+By+C=0 \qquad ①$$

上运动,则有

$$Ax' + By' + C = 0. \quad ②$$

将 $x' = 3x + 2y + 1, y' = x + 4y - 3$ 代入②,得

$$A(3x + 2y + 1) + B(x + 4y - 3) + C = 0,$$

即

$$(3A + B)x + (2A + 4B)y + (A - 3B + C) = 0. \quad ③$$

方程①,③代表同一条直线,显然 A, B, C 也不为零,故有

$$\frac{3A + B}{A} = \frac{2A + 4B}{B} = \frac{A - 3B + C}{C}. \quad ④$$

由④前一个等式可得 $B = 2A$ 或 $B = -A$.

当 $B = 2A$ 时,又由④中后一个等式得到 $C = -\frac{5}{4}A$;当 $B = -A$ 时,由④后一个等式得到 $C = 4A$. 从而,有

$$A:B:C = 4:8:(-5),$$

或

$$A:B:C = 1:(-1):4,$$

也就是 P、P' 可在同一直线

$$x - y + 4 = 0$$

上运动,也可在另一直线

$$4x + 8y - 5 = 0$$

上运动.

例 2 已知有向线段 PQ 的起点 P 和终点 Q 的坐标分别为$(-1,1)$和$(2,2)$,若直线 $l: x + my + m = 0$ 与 PQ 的延长线相交,求 m 的取值范围.

分析一 直线 l 的方程 $x + my + m = 0$,即 $x + m(1 + y) = 0$,显然是经过点 $M(0,-1)$的直线方程. 过点 M 作直线 $l_1 /\!/ PQ$. l_1 的斜率为 $k_1 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$,过 M、Q 作直线 l_2,则 l_2 的斜率为 $k_2 = \frac{3}{2}$,与 PQ 的延长线相交的直线 l 应夹在 l_1 与 l_2 之间,即 $k_1 < k < k_2$(k 为 l 的斜率). 于是$\frac{1}{3} < -\frac{1}{m} < \frac{3}{2}$,即 $3 > -m > \frac{2}{3}$, $-3 < m < -\frac{2}{3}$.

分析二 直线 PQ 的方程为

$$y-1=\frac{1}{3}(x+1),$$

即
$$x-3y+4=0.$$

联立方程组
$$\begin{cases}x-3y+4=0,\\x+my+m=0.\end{cases}$$

当 $m\neq-3$ 时，$\begin{cases}x=\dfrac{-7m}{m+3},\\y=\dfrac{-m+4}{m+3}\end{cases}$ 是直线 l 与直线 PQ 的交点的坐标，欲使交点位于有向线段 PQ 的延长线上，须且只须 $\frac{-7m}{m+3}>2$ 或 $\frac{-m+4}{m+3}>2$，解之，均有 $-3<m<-\frac{2}{3}$. 又 $m=-3$ 时，方程组无解，故 m 的取值范围是 $-3<m<-\frac{2}{3}$.

分析三 设 $M(x,y)$ 为 PQ 延长线上任意一点，$\frac{PM}{MQ}=\lambda$，显然 $\lambda\in(-\infty,-1)$，$x=\frac{-1+2\lambda}{1+\lambda}$，$y=\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}$，代入直线方程 l，得

$$\frac{-1+2\lambda}{1+\lambda}+\frac{m(1+2\lambda)}{1+\lambda}+m=0. \qquad ①$$

由①得
$$\lambda=\frac{1-2m}{2+3m}.$$

于是
$$\frac{1-2m}{2+3m}<-1.$$

解得 $-3<m<-\frac{2}{3}$.

例3 如图 8－1，已知△ABC 各顶点的坐标分别为 (x_A,y_A)、(x_B,y_B)、(x_C,y_C). 点 E、F 分别在边 AC、AB 上. $AE=\frac{1}{3}AC$，$AF=\frac{1}{4}AB$，BE、CF 交于点 D，求 D 点坐标.

分析一 设点 D 的坐标为 (x_D,y_D). 先根据定比分点公式得到

E、F 的坐标，再由两点式确定直线 BE、CF 的方程并予以联立，问题可望解决，只是这样做，计算上要遇到点麻烦，改变一个角度考虑．因 $AE=\frac{1}{3}AC$，$AF=\frac{1}{4}AB$，故有 $|CE|:|EA|=2:1$，$|AF|:|FB|=1:3$．根据梅涅劳斯定理，可得

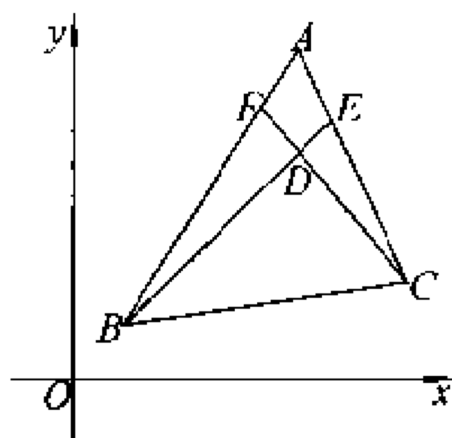


图 8－1

$$\frac{|CE|}{|CA|}\cdot\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DE|}=1,$$

从而 $|BD|:|DE|=9:2$．根据定比分点公式知

$$x_E=\frac{x_C+2x_A}{1+2}=\frac{x_C+2x_A}{3}, \quad ①$$

$$x_D=\frac{x_B+\frac{9}{2}x_E}{1+\frac{9}{2}}=\frac{2x_B+9x_E}{11}, \quad ②$$

把①代入②，化简即得

$$x_D=\frac{6x_A+2x_B+3x_C}{11}.$$

同理
$$y_D=\frac{6y_A+2y_B+3y_C}{11}.$$

分析二　下面的想法别具一格．

根据物理知识，我们知道，如果三个顶点 A、B、C 处放置有质量分别是 m_A，m_B，m_c 的质点，那么这个质点组的重心 M 坐标是

$$\left(\frac{m_Ax_A+m_Bx_B+m_Cx_C}{m_A+m_B+m_C},\frac{m_Ay_A+m_By_B+m_Cy_C}{m_A+m_B+m_C}\right). \quad ⑤$$

理由是这样的：B，C 两质点的重心 N 到 B，C 两点的距离之比为 $m_c:m_B$，所以由定比公式得 N 点的坐标为

$$\left(\frac{m_Bx_B+m_Cx_C}{m_B+m_C},\frac{m_By_B+m_Cy_C}{m_B+m_C}\right). \quad ⑥$$

同样，A 处质点与 N 处质点重心坐标为

$$\left(\frac{m_Ax_A+(m_B+m_C)x_N}{m_A+m_B+m_C},\frac{m_Ax_A+(m_B+m_C)y_N}{m_A+m_B+m_C}\right). \qquad ⑦$$

将⑥代入⑦即得⑤.

以下利用⑤来解决例4. 因 $AF:FB=1:3$，为了使 A、B 处的两质点的重心在 F，A 处质点的质量应当是 B 处质点质量的 3 倍. 又因为 $AE:EC=1:2$，为了使 A、C 处两质点重心在 E 处，A 点处的质量应当是 C 处的 2 倍. 于是，我们可在 A、B、C 处分别放置质量为 6、2、3 的质点. 这样一来，AB 的重心在 F、A、B、C 的重心在 CF 上，同样又有 A、B、C 的重心在 BE 上. 因此 A、B、C 的重心就是 CF 和 BE 的交点 D. 由⑤知 D 点坐标为③、④.

注 一般地，如果$\frac{AF}{FB}=\frac{m}{l}$，$\frac{AE}{EC}=\frac{n}{l}$（通分总可使两个异分母分数化为同分母分数），类似地，可求出 BE、CF 的交点的坐标为

$$\left(\frac{lx_A+mx_B+nx_C}{l+m+n},\frac{ly_A+my_B+ny_C}{l+m+n}\right). \qquad ⑧$$

例 3 是线共点问题的一个典型. ⑧很有用处，这里列举一下用三角形顶点坐标表示三角形中几个特殊点的坐标.

(1) 若 BE、CE 为$\triangle ABC$ 的中线，由⑧立即可得$\triangle ABC$ 重心的坐标为

$$\left(\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C),\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)\right).$$

(2) 若 BE、CF 为$\triangle ABC$ 的内角平分线，则因$\frac{AF}{FB}=\frac{b}{a}$，$\frac{AE}{EC}=\frac{c}{a}$，将它们代入⑧并化简，可以得到$\triangle ABC$ 内心 I 的坐标为

$$\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c},\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right).$$

(3) 若 BE、CF 为$\triangle ABC$ 的高，则：

$$\frac{AE}{EC}=\frac{c\cos A}{a\cos C}=\frac{\frac{c}{\cos C}}{\frac{a}{\cos A}}.$$

同样，

$$\frac{AF}{FB}=\frac{\frac{b}{\cos B}}{\frac{a}{\cos A}}.$$

从而，$\triangle ABC$ 的垂心 H 的坐标为

$$\left(\frac{\frac{a}{\cos A}x_A+\frac{b}{\cos B}x_B+\frac{c}{\cos C}x_C}{\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}},\frac{\frac{a}{\cos A}y_A+\frac{b}{\cos B}y_B+\frac{c}{\cos C}y_C}{\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}}\right).$$

(4) 若 BE、CF 交点为$\triangle ABC$ 的外心 O，则

$$\frac{AE}{EC}=\frac{\frac{BE}{\sin A}\cdot\sin\angle EBA}{\frac{BE}{\sin C}\cdot\sin\angle CBE}=\frac{\sin C\cdot\sin\frac{\pi-\angle AOB}{2}}{\sin A\cdot\sin\frac{\pi-\angle BOC}{2}}=\frac{\sin C\cdot\cos C}{\sin A\cdot\cos A}=\frac{\sin 2C}{\sin 2A}.$$

同样，$\frac{AF}{FD}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$，所以，$\triangle ABC$ 外心的坐标为

$$\left(\frac{\sin 2A\cdot x_A+\sin 2B\cdot x_B+\sin 2Cx_C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C},\frac{\sin 2A\cdot y_A+\sin 2B\cdot y_B+\sin 2C\cdot y_C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}\right).$$

例 4 如图 8-2，过点 $P(3,1)$ 的直线 l 被二平行直线 $l_1: x+2y-1=0$ 与 $l_2: x+2y-3=0$ 所截的线段的中点在直线 $l_3: x-y-1=0$ 上，求直线 l 的方程.

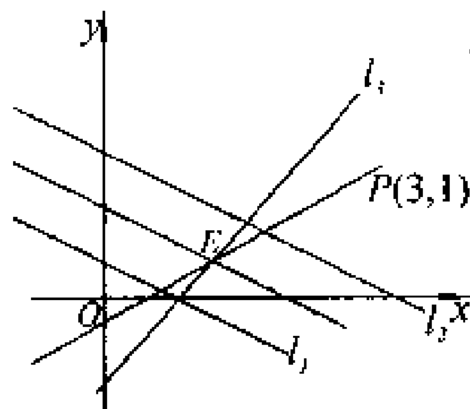


图 8-2

分析 设直线 l 被二平行直线 l_1、l_2 所截线段的中点为 E，若能确定点 E 的坐标，由两点式即可得到所欲求的直线 l 的方程. 要做到这一点办法还不少. 以下的做法较好地利用了图形几何性质，有助于简化计算：点 E 在与平行直线 l_1、l_2 等距的直线 l_4 上，不难求得 l_4 的方程. 它形如 $x+2y+c=0$. 其中

$$c=\frac{-1+(-3)}{2}=-2,$$

也就是 l_4 的方程为

$$x+2y-2=0.$$

解方程组$\begin{cases}x+2y-2=0,\\x-y-1=0,\end{cases}$得 E 点坐标为$(\frac{4}{3},\frac{1}{3})$. 由两点式得直线 l 的方程为 $2x-5y-1=0$.

以下的一种想法则是直接在代数运算上做“文章”.

将直线方程

$$l_1: x+2y-1=0,$$

与

$$l_2: x+2y-3=0,$$

相乘得二次方程 $(x+2y-1)(x+2y-3)=0.$ ①

这个方程表示的就是二直线 l_1、l_2. 现将①改写为

$$(x+2y)^2-4(x+2y)+3=0. \quad ②$$

设直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases}x=3+t\cos\alpha,\\y=1+t\sin\alpha,\end{cases}\quad (t\text{ 为参数}) \quad ③$$

将③代入②,消去 x,y 得

$$(\cos\alpha+2\sin\alpha)^2t^2+6(\cos\alpha+2\sin\alpha)t+8=0. \quad ④$$

设直线 l 交直线 l_1、l_2 于 A、B,线段 AB 的中点 E. 于是 $\cos\alpha+2\sin\alpha\neq0$,且

$$t=\frac{t_1+t_2}{2}=-\frac{3}{\cos\alpha+2\sin\alpha},$$

从而,E 点坐标为(x_0,y_0),有

$$x_0=3-\frac{3\cos\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha},$$

$$y_0=1-\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha}.$$

因 E 点在 l_3 上,故

$$\left(3-\frac{3\cos\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha}\right)-\left(1-\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha}\right)-1=0.$$

解得 $\tan\alpha=\frac{2}{5}$.故所求 l 的方程为 $y-1=\frac{2}{5}(x-3)$,即

$$2x-5y-1=0.$$

上述解法中,将两条直线的方程合成一个二次方程是极有用的.在某些场合它往往比单独处理两个方程更为简捷明快.

例 5 已知直线 $l:y=4x$ 和点 $R(6,4)$,在 l 上求一点 Q,使直线 RQ 与 l 以及 x 轴在第一象限内所围成的三角形面积最小.

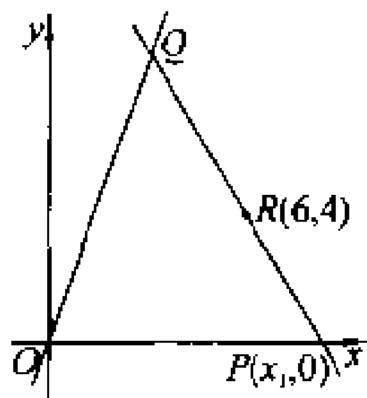


图 8-3

分析 设点 Q 坐标为 (x_0,y_0),直线 QR 交 x 轴于 $P(x_1,0)$,则 y_0 为$\triangle OQP$ 的 OP 边上的高,又点 Q 在直线 OQ 上,故 $y_0=4x_0$,如图 8-3. 于是

$$(4x_0-4)(6-x_1)-4(x_0-6)=0$$

整理得 $x_1=\frac{5x_0}{x_0-1}$.

显然 $4x_0>4$,即 $x_0>1$,否则点 Q 位于直线 $y=4$ 的下方,此时不可能存在一个由直线 RQ,l 及 x 轴围成的位于第一象限的三角形.所以,$\triangle OQP$ 的面积为

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|4x_0|\cdot\left|\frac{5x_0}{x_0-1}\right|=\frac{10x_0^2}{x_0-1}\\&=20+10(x_0-1)+\frac{10}{x_0-1}\\&\geqslant 20+2\sqrt{10(x_0-1)\cdot\frac{10}{x_0-1}}\\&=40.\end{aligned}$$

当 $x_0=2$ 时,$S_{\min}=40$,Q 点坐标为 $(2,8)$.

例 6 在直线 $l:x+y-5=0$ 上找一点 $P(x,y)$,使得点 $P(x,y)$ 对 $A(1,0)$、$B(3,0)$ 的视角$\angle APB$ 最大.

分析一　如图 8－4，$|AB|=2$，$P(x,y)$为 l 上的点，作 AE、BF 垂直于AB，且交 l 于E、F. 显然

$$\angle AEB < \angle AFB，且 \angle AFB = \frac{\pi}{4}.$$

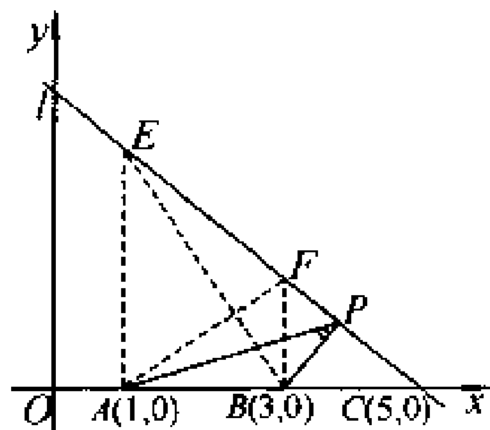


图 8－4

当 P 点不与 E、F 重合时，直线 AP，BP 的斜率分别为 $k_{PA}=\frac{y}{x-1}$，$k_{PB}=\frac{y}{x-3}$. 设$\angle APB=\alpha$，并记 $\tan\alpha = A$.

（ⅰ）当 P 位于上半平面时，

$$A=\frac{k_{PB}-k_{PA}}{1+k_{PB}k_{PA}}=\frac{\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x-1}}{1+\frac{y}{x-3}\cdot\frac{y}{x-1}}$$

整理得

$$A(x^2-4x+3+y^2)=2y. \qquad ①$$

将 $x=5-y$ 代入①得

$$Ay^2-(3A+1)y+4A=0.$$

此时，有

$$\Delta=(3A+1)^2-16A^2\geqslant 0,$$

即

$$7A^2-6A-1\leqslant 0.$$

解得 $-\frac{1}{7}\leqslant A\leqslant 1$.

显然 $A>0$，且 $A\neq 1$，故 $A<1$，说明$\angle APB<\frac{\pi}{4}$.

（ⅱ）当 P 位于下半平面时，

$$A=\frac{k_{PA}-k_{PB}}{1+k_{PA}k_{PB}}=\frac{\frac{y}{x-1}-\frac{y}{x-3}}{1+\frac{y}{x-1}\cdot\frac{y}{x-3}}.$$

整理并将 $x=5-y$ 代入，可得

$$Ay^2-(3A-1)y+4A=0.$$

此时有

$$\Delta=(3A-1)^2-16A^2\geqslant 0,$$

即

$$7A^2-6A-1\leqslant 0.$$

解得 $-1\leqslant A\leqslant \frac{1}{7}$.

同样,不难看出 $A>0$,从而

$$A_{\max}=\frac{1}{7},\alpha_{\max}=\arctan\frac{1}{7}.$$

综上所述,$\angle APB$ 的最大值是$\frac{\pi}{4}$,点 P 的坐标为(3,2).

分析二 实际上,本例基于这样的几何事实:若直线 l 上的点与 l 外两点 A、B 所成解$\angle APB$ 最大,则圆 APB 与直线 l 相切.否则直线 l 与圆 ABP 还有一公共点,设为 Q,位于线段 PQ 内的点 M,使得$\angle AMB>\angle APB$,导致矛盾.

易知 l 与 AB 交点 $C(5,0)$.根据圆幂定理知

$$|CP|^2=|AC|\cdot|BC|=4\times 2=8,$$

所以 $|CP|=2\sqrt{2}$.

直线 l 方程可改写为

$$\begin{cases}x=3+t\cos\dfrac{3\pi}{4},\\ y=t\sin\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}\quad(t\text{ 为参数})$$

取 $t=\pm 2\sqrt{2}$,分别得 $P_1(3,2)$,$P_2(7,-2)$.由于$\angle AP_1B=\frac{\pi}{4}$,$\angle AP_2B<\angle AP_1B=\frac{\pi}{4}$,故$\angle AP_1B$ 为最大角,$P_1(3,2)$为所求 P 点.

例 7 证明:无论 λ 取何值,直线

$$(2+\lambda)x-(1+\lambda)y-2(3+2\lambda)=0$$

与点 $P(-2,2)$的距离 d 都只能小于$4\sqrt{2}$.

分析 将方程变形为

$$(2x-y-6)+\lambda(x-y-4)=0,$$
故这直线恒过二直线

$$2x-y-6=0$$

及 $$x-y-4=0 \quad ①$$

的交点．设交点为 M，易得 M 点坐标$(2,-2)$．$|PM|=4\sqrt{2}$，对于任何一条过 M 点直线 l，点 P 到它的距离不超过 $|PM|$（如图 8－5）．又过 M 点垂直 PM 的直线的方程是①，但无论 λ 为何值，题设直线方程都不能表示为①，所以 $d<4\sqrt{2}$．

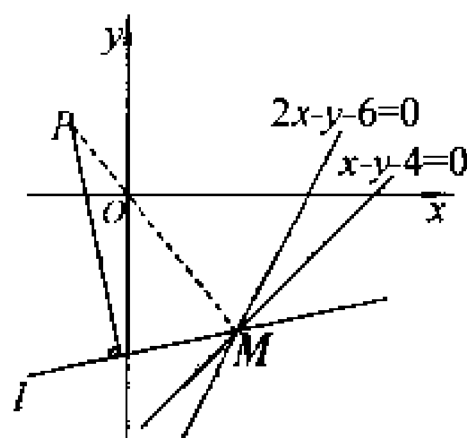


图 8－5

例 8 自△ABC 的垂心 H 引∠A 的内外角平分线的垂线，垂足分别是 E、F，M 为 BC 的中点，求证：M、E、F 三点共线．

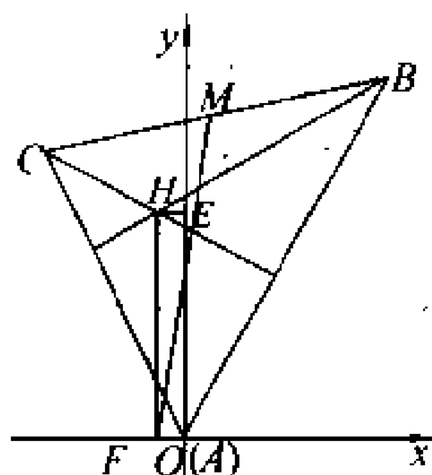


图 8－6

分析 由于∠A 的内外角平分线互相垂直，故可以它们所在直线为轴建立坐标系．如图 8－6．设 AB 的斜率为 k，则 $k=\cot\frac{A}{2}$，$\frac{A}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$．而 AC 的斜率显然为 $-k$，故可设点 B 的坐标为(b,bk)，点 C 的坐标为$(c,-ck)$．于是点 M 的坐标是$\left(\frac{b+c}{2},\frac{(b-c)k}{2}\right)$．又设垂心 H 的坐标是(u,v)，则 E，F 的坐标分别是$(0,v)$、$(u,0)$．直线 EF 的方程为

$$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}=1. \quad ①$$

因 $CH\perp AB$，$BH\perp AC$，所以

$$\frac{v+ck}{u-c}=-\frac{1}{k},$$

$$\frac{v-bk}{u-b}=\frac{1}{k}.$$

两式相加，整理得

$$v(b+c)+uk(b-c)=2uv,$$

即
$$\frac{b+c}{2u}+\frac{k(b-c)}{2v}=1. \qquad ②$$

把点 M 的坐标$\left(\frac{b+c}{2},\frac{(b-c)k}{2}\right)$代入①的左边，根据②知其值为 1，说明点 M 在直线 EF 上，即 M、E、F 三点共线.

注 用解析法证三点共线的常规思路是：或证明两两连线斜率相等；或证明其中一点在另二点的连线上.

如果两条直线的交点只是在解题的过程中出现，而不是最终需要得出的结果，我们往往不求出交点的坐标，而采用直线束的形式，以省去一些计算上的麻烦.

例 9 自△ABC 的顶点 A 引 BC 的垂线，垂足为 D. 在 AD 上任取一点 H，直线 BH 交 AC 于 E，CH 交 AB 于 F，试证 AD 平分 ED 与 DF 所成的角.

分析 如图 8－7 建立直角坐标系. 设 $A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$，$H(0,h)$. 于是直线 BH 的方程为

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{h}=1, \qquad ①$$

直线 AC 的方程为

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1, \qquad ②$$

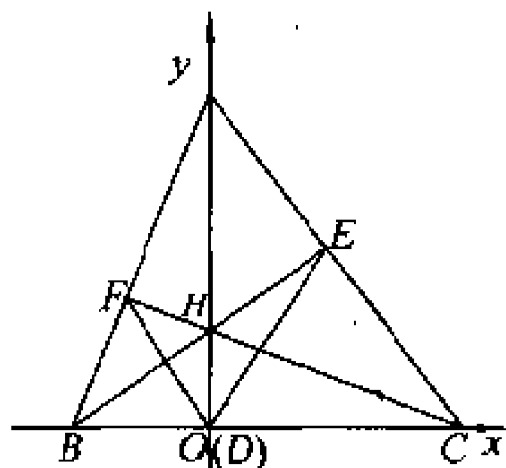


图 8－7

过 BH、AC 交点 E 的直线束方程为

$$\lambda\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{h}-1\right)+\mu\left(\frac{x}{c}+\frac{y}{a}-1\right)=0. \qquad ③$$

有意思的是当 $\lambda=1$，$\mu=-1$ 时，③中的常数项能被消去，这意味着此时③变为

$$x\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+y\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{a}\right)=0. \qquad ④$$

直线④过原点，即为直线 DE.

由于 B、C 的"地位"是平等的，所以直线 DF 方程为

$$x\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+y\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{a}\right)=0. \qquad ⑤$$

由④、⑤知直线 DE、DF 的斜率互为相反数，所以 AD 平分 ED 与 DF 所成的角.

注 作为本例的特殊情况，H 是三角形垂心时，它也是垂足三角形的内心.

例 10 在直角三角形 ABC 中，AD 是斜边 BC 上的高. 连接三角形 ABD 的内心与三角形 ACD 的内心的直线分别与边 AB 及边 AC 相交于 K 及 L 两点. 三角形 ABC 与 AKL 的面积分别为 S 和 T. 求证：$S\geqslant 2T$.

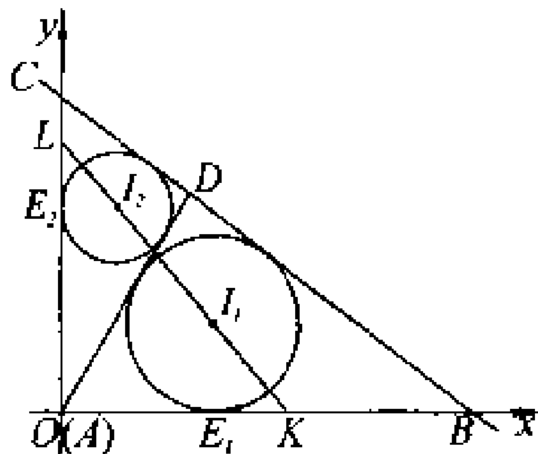


图 8－8

分析 设△ABC 的三边长分别 a，b，c，其中

$$b^2+c^2=a^2, \qquad ①$$

且

$$S=\frac{1}{2}bc. \qquad ②$$

问题在于如何算得 T，这一点十分棘手. 不过从图形直观地看，△AKL 似乎是等腰直角三角形. 不妨作一大胆猜想，一旦这一点得到证实，问题也就迎刃而解了. 不过用纯几何方法证明它仍非易事，倒是运用解析法方便些. 如图 8－8，建立坐标系. 只须证明△ABD、△ACD 的内切圆圆心 I_1、I_2 在直线

$$x+y=k \qquad ③$$

上.

设△ABC 的内切圆圆心 I，圆 I 切 BC 于 E，切 AC 于 F，那么，如图 8－9 所示，

$$CE+EI=FA+CF=b.$$

由于△ADB∽△CAB，其相似比为 $\frac{c}{a}$，故

$$AE_1 + E_1 I_1 = \frac{c}{a} \cdot b, \qquad ④$$

这里 E_1 为⊙I_1 与 AB 的切点. 又设⊙I_2 切 AC 于 E_2, 则同理有

$$AE_2 + E_2 I_2 = \frac{b}{a} \cdot c, \qquad ⑤$$

④、⑤表明点 I_1、I_2 的纵横坐标满足方程③, 其中 $k = \frac{bc}{a}$. 这样一来,

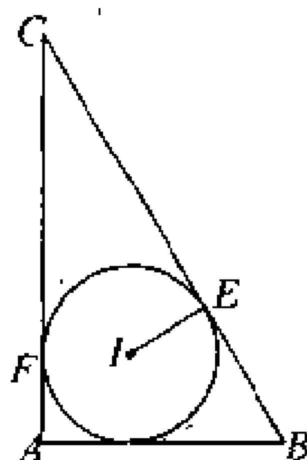


图 8－9

$$T = \frac{1}{2}|AK| \cdot |AL| = \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}\right)^2, \qquad ⑥$$

②代入⑥, 得

$$\frac{T}{S} = \frac{bc}{a^2},$$

再由①知

$$\frac{bc}{a^2} = \frac{bc}{b^2 + c^2} \leqslant \frac{1}{2},$$

故

$$2T \leqslant S.$$

练 习 八

一、选择题

1. 直线$\begin{cases} x = 2 + at \\ y = -1 + bt \end{cases}$($t$ 为参数) 经过定点$(2, -1)$, 当 $ab < 0$ 时, 倾斜角为 (　　).

(A) $\arctan \frac{b}{a}$　　(B) $-\arctan \frac{b}{a}$

(C) $\pi - \arctan \frac{b}{a}$　　(D) $\pi + \arctan \frac{b}{a}$

2. 方程 $6xy + 4x - 9y - 6 = 0$ 表示两条直线, 这两条直线的夹角是 (　　).

(A) $90°$　　(B) $60°$　　(C) $45°$　　(D) $30°$

3. 使三条直线 $4x + y = 4$, $mx + y = 0$, $2x - 3my = 4$ 不能围成三

角形的 m 值最多有　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）.

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

4. 已知点 M 到点 $A(1,0)$, $B(a,2)$ 及到 y 轴的距离都相等,若这样的点 M 恰有一个,a 可能值的个数为　　　　　　　　（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 无数个

二、填空题

5. 已知点 $A(2,1)$ 和 $B(-2,2)$,在直线 $l:2x-3y+c=0$ 的两侧,则 c 的取值范围是________.

6. 已知△ABC 的顶点 A 的坐标是 $(3,4)$,重心 G 的坐标是 $(1,1)$,顶点 B 在第二象限. 若垂心在原点 O,则 B 点坐标为________.

7. 梯形 $OABC$ 的坐标依次 $(0,0)$、$(6,0)$、$(4,5)(0,5)$,直线 PQ 交边 CB, OA 于 P、Q,且过点 $M(\frac{10}{3},\frac{5}{2})$,梯形 $OABC$ 被直线 PQ 分成的两部分面积的比为________.

8. 经过点 $P(2,3)$ 且被两条平行直线 $l_1:3x+4y-7=0$, $l_2:3x+4y+8=0$ 所截得的线段长是 $3\sqrt{2}$ 的直线方程是________.

9. 已知二次方程 $x^2+xy-6y^2-20x-20y+k=0$ 表示两条直线,则这两条直线的夹角是________.

10. 已知平面上两点 $A(4,1)$ 和 $B(0,4)$,点 M 在直线 $l:3x-y-1=0$ 上,且使 $|MA|-|MB|$ 最大,则点 M 的坐标为________.

三、解答题

11. 已知△ABC 的顶点 $A(3,-1)$,AB 边上的中线所在直线方程是 $6x+10y-59=0$,$\angle B$ 的平分线所在直线是 $x-4y+10=0$,求 BC 边所在的直线方程.

12. 设梯形 $ABCD$ 两平行边 AB、CD 上各有一动点 P、Q,直线 PQ 平分梯形面积,求证:PQ 过一定点.

13. 过边长为 a 的正三角形的重心 G 作一直线交两边于 E、F,设 EG、FG 的长度为 p、q,求证:

$$\frac{1}{p^2}-\frac{1}{pq}+\frac{1}{q^2}=\frac{9}{a^2}.$$

14. 设 AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线.如果射线 AL 与 AL' 关于 AD 对称,那么 AL 与 AL' 称为(关于 $\angle BAC$)共轭等角线.证明:在 $\triangle ABC$ 中,如果 AL、BM、CN 三条射线交于一点 P,则它们分别关于 $\angle BAC$,$\angle CBA$,$\angle ACB$ 的共轭等角线 AL'、BM'、CN' 也交于一点.

第九讲　圆的方程

知识点和方法述要

在平面几何研究中，圆占有突出地位. 在解析几何中，圆的研究也是一项重要内容.

1. 最简单的圆的方程是圆心在原点的圆的方程：

$$x^2+y^2=r^2, \qquad ①$$

其中 r 是半径长. 它的参数方程形式是

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

切点为 (x_1,y_1) 的圆 $x^2+y^2=r^2$ 的切线方程是

$$x_1x+y_1y=r^2.$$

又自点 (x_0,y_0) 引圆①两切线，其切点的连线称为点 (x_0,y_0) 关于圆①的切点弦，其方程是

$$x_0x+y_0y=r^2.$$

2. 圆的标准方程是

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2, \qquad ②$$

这里圆心为 (x_0,y_0)，半径长为 r. 它的参数方程形式是

$$\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta, \\ y=y_0+r\sin\theta. \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

利用坐标系平移，可相应得到切线方程、切点弦方程.

3. 圆的一般方程是

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \qquad ③$$

圆心 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径长 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$，其中 $D^2+E^2-4F>0$. 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，圆退化为点. 切点为 (x_1,y_1) 的圆③的切

线方程是

$$x_1x+y_1y+D\frac{x+x_1}{2}+E\frac{y+y_1}{2}+F=0.$$

自 $P_0(x_0,y_0)$引圆的切线，切点为 P_1，则切线长

$$|P_0P_1|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F}.$$

4. 到两不同心的已知圆 $C_i: x^2+y^2+D_ix+E_iy+F_i=0(i=1,2)$的切线长相等的点的轨迹称此两圆的根轴. 共根轴的圆系称为共轴圆系. 共轴圆系的方程为

$$\lambda_1(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+\lambda_2(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0, \quad ④$$

λ_1,λ_2不同时为零. 当 $\lambda_1=-\lambda_2$ 时，④即为圆的根轴方程

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0. \quad ⑤$$

当两圆相交时，④表示过两交点的圆系；当两圆相切时，④表示过两圆切点且与它们相切于该点的圆系.

例 题 精 讲

例 1 一圆经过 $A(4,2)$、$B(-1,3)$两点，且在两个坐标轴上的四个截距的和是 14，求此圆的方程.

解 设圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \quad ①$$

因圆过 A、B 两点，故有

$$\begin{cases}20+4D+2E+F=0, & ②\\ 10-D+3E+F=0. & ③\end{cases}$$

设圆在 x 轴、y 轴上的截距分别为 x_1,x_2,y_1,y_2. 依题设

$$x_1+x_2+y_1+y_2=14. \quad ④$$

分别令 $y=0$, $x=0$, 由①得

$$x^2 + Dx + F = 0, \quad ⑤$$

$$y^2 + Ey + F = 0. \quad ⑥$$

根据韦达定理,由⑤,⑥得

$$x_1 + x_2 = -D, \quad ⑦$$

$$y_1 + y_2 = -E. \quad ⑧$$

将⑦、⑧代入④得

$$D + E = -14. \quad ⑨$$

由②、③、⑨解得 $D = -4, E = -10, F = 16$. 所求圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 16 = 0$.

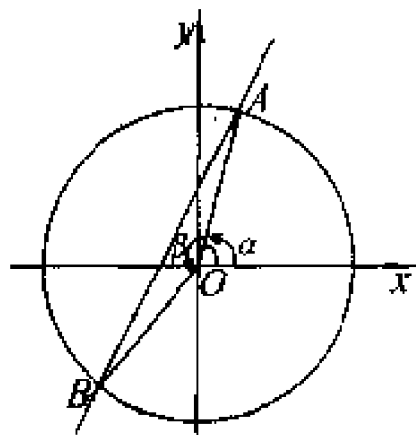


图 9－1

例 2 已知圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和直线 $y = 2x + m$ 相交于 A、B,且 OA、OB 与 x 轴正方向所成的角是 α 和 β,求证 $\sin(\alpha + \beta)$是定值.

分析一 如图 9－1. 设 $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B(\cos\beta, \sin\beta)$,于是

$$\sin\alpha = 2\cos\alpha + m, \quad ①$$

$$\sin\beta = 2\cos\beta + m. \quad ②$$

将 $y = 2x + m$ 代入圆方程 $x^2 + y^2 = 1$,消去 y,整理得

$$5x^2 + 4mx + (m^2 - 1) = 0. \quad ③$$

当直线与圆相交时,③有两实根 $\cos\alpha$, $\cos\beta$. 根据韦达定理得

$$\cos\alpha + \cos\beta = -\frac{4}{5}m, \quad ④$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{m^2 - 1}{5}. \quad ⑤$$

由①、②得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ &= (2\cos\alpha + m)\cos\beta + \cos\alpha(2\cos\alpha + m) \\ &= 4\cos\alpha\cos\beta + (\cos\alpha + \cos\beta)m. \quad ⑥\end{aligned}$$

将④、⑤代入⑥,有

$$\sin(\alpha+\beta)=4\cdot\frac{m^2-1}{5}+\left(-\frac{4}{5}m\right)m$$

$$=-\frac{4}{5}.$$

分析二 根据万能置换公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}},\quad ⑦$$

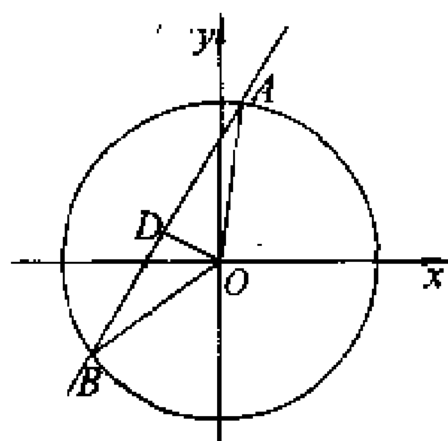


图 9-2

若能求得 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ 值，问题可望解决. 如图 9-2，取 AB 中点 D. 连 OD，则 $OD\perp AB$. 从而

$$\angle xOD=\alpha+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

因直线 AB 的斜率为 2，所以直线 OD 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，即

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{1}{2}.\quad ⑧$$

⑧代入⑦，问题可以解决.

注 圆有很多几何性质，充分利用这些性质，数形结合是研究圆有关问题的一个基本思想.

例 3 过点 $M(3,0)$，作直线 l 与圆 $x^2+y^2=16$ 相交于两点 A、B，求△AOB 面积最大值.

分析 注意到 $|OM|=3$ 是定值，考虑通过 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot|OM|\cdot|y_A-y_B|$ 进行面积计算.

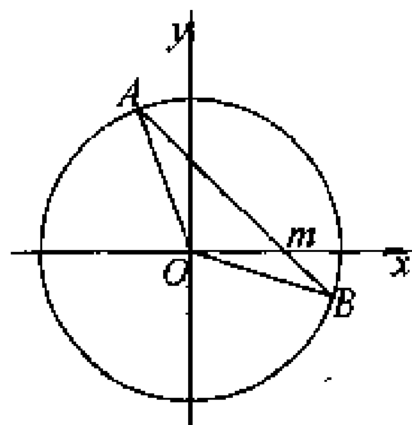


图 9-3

设 l 的倾斜角为 θ，方程为 $x=y\text{ctan}\theta+3$，代入圆 O 的方程，化简得

$$(1+\text{ctan}^2\theta)y^2-(6\text{ctan}\theta)y-7=0.$$

根据韦达定理

$$|y_A - y_B| = \sqrt{\left(\frac{6\cot\theta}{1+\cot^2\theta}\right)^2 + \frac{28}{1+\cot^2\theta}}$$

$$= 2\sqrt{9\sin^2\theta\cos^2\theta + 7\sin^2\theta}.$$

于是

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OM|\cdot|y_A - y_B|$$

$$= 3\sqrt{-9\sin^4\theta + 16\sin^2\theta}$$

$$= 3\sqrt{-9\left(\sin^2\theta - \frac{8}{9}\right)^2 + \frac{64}{9}} \leqslant 8.$$

当 $\sin^2\theta = \frac{8}{9}$，即 $\theta = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 或 $\theta = \pi - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时取等号.

所求$\triangle AOB$ 面积的最大值为 8.

例 4 自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上被 x 轴反射，其反射光线所在直线与圆 C

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$$

相切，求光线 l 所在的方程.

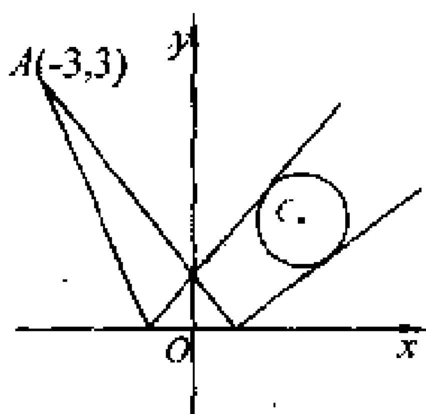


图 9－4

分析一 如图 9－4，在坐标平面上，经 x 轴入射光线与反射光线间的斜率互为相反数. 设直线 $l: y = k(x+3) + 3$，则反射光线的斜率 k' 满足 $k' = -k$. 直线 l 与 x 轴交点坐标为 $\left(-\frac{3(k+1)}{k}, 0\right)$，故直线 l' 的方程为

$$y = -k\left(x + \frac{3(k+1)}{k}\right).$$

化简得

$$y = -(kx + 3k + 3).$$

对 $C(2,2)$ 点到直线 l' 的距离为

$$d = \frac{|5k+5|}{\sqrt{k^2+1}} = 1.$$

解之，得 $k_1=-\frac{4}{3}$，$k_2=-\frac{3}{4}$. 从而得到直线 l 的方程为

$$y=-\frac{4}{3}(x+3)+3,$$

或

$$y=-\frac{3}{4}(x+3)+3.$$

即 $4x+3y+3=0$ 与 $3x+4y-3=0$.

分析二 这是一个轴对称问题. 我们只须作出圆 C 关于 x 轴的对称圆 C'（图 9-5），再求出由点 $A(-3,3)$ 向圆 C' 所引切线方程即为所求.

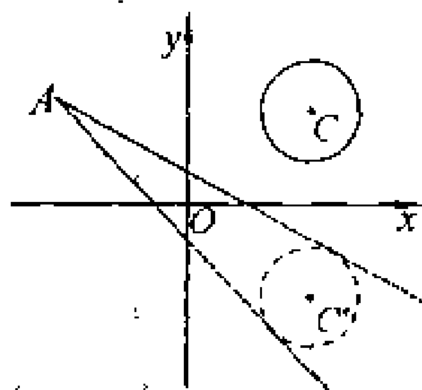


图 9-5

依题设，圆 C 方程为

$$(x-2)^2+(y-2)^2=1,$$

它关于 x 轴对称的圆 C' 的方程是

$$(x-2)^2+(y+2)^2=1.$$

设光线 l 所在直线的方程是

$$y-3=k(x+3),$$

点 $C'(2,-2)$ 到这条直线距离等于 1，即

$$d=\frac{|5k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=1.$$

解得 $k=-\frac{3}{4}$ 或 $k=-\frac{4}{3}$，进而求得直线 l 的方程.

例 5 已知圆 C：

$$(x-2)^2+(y-2)^2=2, \qquad ①$$

过原点 O 作两切线 OT_1、OT_2，切点为 T_1、T_2，再引一直线 l 交直线 T_1T_2 于 K，交圆于 M、N，并设 OM、ON、OK 的长度分别是 t_1，t_2，t_3，求证：

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{2}{t_3}.$$

分析 ①可变为

$$x^2+y^2-4x-4y+6=0.$$

直线 T_1T_2 即原点关于圆 C 的切点弦所在直线,其方程为

$$0\cdot x+0\cdot y-4\cdot\left(\frac{x+0}{2}\right)-4\cdot\left(\frac{y+0}{2}\right)+6=0,$$

即 $$x+y-3=0. \qquad ②$$

设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数),代入①得

$$t^2-4(\cos\alpha+\sin\alpha)t+6=0. \qquad ③$$

因为直线 l 与圆 C 相交于 M、N,故③有两根,且为 t_1,t_2. 根据韦达定理,有

$$\begin{cases}t_1+t_2=4(\cos\alpha+\sin\alpha), & ④\\ t_1\cdot t_2=6. & ⑤\end{cases}$$

由④、⑤知

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{t_1+t_2}{t_1\cdot t_2}=\frac{2}{3}(\cos\alpha+\sin\alpha). \qquad ⑥$$

又将③代入②得

$$t(\cos\alpha+\sin\alpha)=3,$$

此方程的根即 OK 的长度为 t_3,有

$$\frac{2}{t_3}=\frac{2}{3}(\cos\alpha+\sin\alpha). \qquad ⑧$$

由⑦、⑧,命题可获证.

例 6 求以相交两圆 C_1:

$$x^2+y^2+4x+y+1=0$$

及 C_2:

$$x^2+y^2+2x+2y+1=0$$

的公共弦为直径的圆的方程.

分析 求出两圆交点 A、B 的坐标,则圆的方程也就可求. 另一途径是免求交点 A、B 坐标,设过 A、B 的圆系方程:

$$\lambda_1(x^2+y^2+4x+y+1)+\lambda_2(x^2+y^2+2x+2y+1)=0. \qquad ①$$

取 $\lambda_1=-\lambda_2=1$,取得圆 C_1 与圆 C_2 公共弦所在直线方程

$$2x-y=0. \quad ②$$

圆 C_2 的圆心$(-1,-1)$不在直线②上,故可将①改写为

$$x^2+y^2+4x+y+1+\lambda(x^2+y^2+2x+2y+1)=0,$$

其圆心坐标为 $C\left(-\frac{2+\lambda}{1+\lambda},-\frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)}\right)$.点 C 在直线②上,所以

$$-\frac{2(2+\lambda)}{1+\lambda}+\frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)}=0.$$

解得 $\lambda=-\frac{7}{2}$.故所求方程为

$$-\frac{5}{2}x^2-\frac{5}{2}y^2-3x-6y--\frac{5}{2}=0,$$

即
$$5x^2+5y^2+6x+12y+5=0.$$

例 7 求圆 C_1:

$$x^2+y^2+2x+6y+9=0$$

与圆 C_2:

$$x^2+y^2-6x+2y+1=0$$

的公切线方程.

分析 由于两圆的公切线分别内分和外分圆心距成两圆半径之比,故两圆的公切线与连心线的交点可确定.从而将两圆公切线问题转化为过一点作其中一圆的切线问题.

由两圆方程知圆 C_1 的圆心为 $O_1(-1,-3)$,半径 $r_1=1$,圆 C_2 的圆心为 $O_2(3,-1)$,半径 $r_2=3$.设两圆内外公切线分别交连心线 O_1O_2 于 N、M,则

$$\frac{O_1M}{MO_2}=-\frac{r_1}{r_2}=-\frac{1}{3},$$

$$\frac{O_1N}{NO_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}.$$

利用定比分点公式可得 $x_M=-3$, $y_M=-4$; $x_N=0$, $y_N=-\frac{5}{2}$.因

两圆外公切线过点 M,现设其为

$$y+4=k(x+3),$$

即
$$kx-y+3k-4=0. \quad ①$$

圆 C_1 的圆心 $O_1(-1,-3)$到直线①的距离等于半径,

即
$$\frac{|k\cdot(-1)-(-3)+3k-4|}{\sqrt{1+k^2}}=1,$$

解得 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$,代入①得两圆外公切线方程为 $y+4=0$ 与 $4x-3y=0$.

两圆内公切线过点 N,其方程设为

$$y+\frac{5}{2}=kx,$$

即
$$2kx-2y-5=0. \quad ②$$

于是
$$\frac{|2k\cdot(-1)-2\cdot(-3)-5|}{\sqrt{4+4k^2}}=1,$$

解得 $k=-\frac{3}{4}$,代入②,即得两圆一内公切线方程为

$$3x+4y+10=0.$$

不难看出圆 C_1、圆 C_2 相离,内公切线应有两条,另一条内公切线到哪里去了呢?毛病出在设两圆内公切线的形式为②时,排除了过点 N 而斜率不存在的直线为两圆内公切线.事实上,直线 $x=0$ 正是被“遗失”的所要求直线.

例8 在△ABC 中,$AB=AC$,圆 O 内切于△ABC 的外接圆 O_1 于 D,并且与 AB、AC 分别相切于 P、Q.求证:P、Q 所连线段的中点是△ABC 内切圆的圆心.

分析 如图 9-6,建立直角坐标系,不妨设圆 O 的半径为 1,$Q(\cos\theta,\sin\theta)$,则 $D(0,-1)$,AC 方程为

$$x\cos\theta+y\sin\theta-1=0. \quad ①$$

又 $CD\perp AC$,所以 DC 的方程是

$$y+1=x\tan\theta,$$

即 $x\sin\theta - y\cos\theta - \cos\theta = 0.$ ②

联立①,②,可得点 C 的纵坐标是

$$y = \sin\theta - \cos^2\theta, \quad ③$$

这也就是直线 CB 的方程.

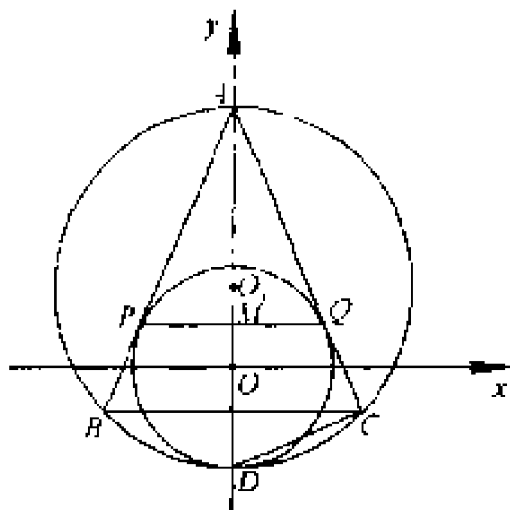


图 9-6

由①、③可得∠ACB 平分线方程为

$$x\cos\theta + y\cdot\sin\theta - 1 = -y + \sin\theta - \cos^2\theta.$$

它与 y 轴交点 M 应是△ABC 的内心,而点 M 的纵坐标为

$$y = \frac{1+\sin\theta-\cos^2\theta}{1+\sin\theta} = \frac{\sin\theta(1+\sin\theta)}{1+\sin\theta} = \sin\theta.$$

所以点 M 在直线 PQ 上且为线段 PQ 中点.

例 9 试证:在坐标平面上存在一个同心圆的集合,使得

(1) 每个整点都在此集合的某个圆周上;

(2) 此集合的每个圆周上有且只有一个整点.

分析 这是一个存在性的问题,关键在于构造一个符合要求的实例.而其本质又是寻找出一定点 $P(x_0, y_0)$,对于任取两个不同整点 $A(a,b)$、$B(c,d)$ ($a=c$, $b=d$ 不同时成立),总有

$$|PA| \neq |PB|. \quad ①$$

因

$$|PA|^2 = (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2,$$
$$|PB|^2 = (x_0-c)^2 + (y_0-d)^2,$$

故

$$\begin{aligned}|PA|^2 - |PB|^2 &= [(x_0-a)^2+(y_0-b)^2] - [(x_0-c)^2+(y_0-d)^2] \\ &= a^2+b^2-c^2-d^2+2(c-a)x_0+2(b-d)y_0. \quad ②\end{aligned}$$

由②可知,对于整数 a,b,c,d,欲使①成立,只须 x_0 为无理数,$2y_0$ 为真分数,这是因为

(i) 若 $a \neq c$, ①成立是显然的.

（ⅱ）若 $a=c$，由②的右边为 $(b-d)(b+d+2y_0)\neq 0(b\neq d)$ 知①成立.

现在可将所有点到 P 点距离从小到大排成一列

$$d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n,\ \cdots,$$

那么，以 P 为圆心，$d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n,\ \cdots$为半径作同心圆集合即得所求.

练 习 九

一、选择题

1. 如果实数 x,y 满足 $(x-2)^2+y^2=3$，那么 $\frac{y}{x}$ 的最大值是 （　　）.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. $D^2=4F$ 且 $E\neq 0$ 是圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 x 轴相切的 （　　）.

(A) 充分但不必要条件　(B) 必要但不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也非必要条件

3. 方程 $|x|-1=\sqrt{1-(y-1)^2}$ 表示的曲线是 （　　）.

(A) 一个圆　(B) 一个半圆

(C) 二个半圆　(D) 二个圆

4. 曲线 $x^2+y^2-y=0$ 与 $ax^2+bxy+x=0$ 的图象有且仅有三个不同的交点，那么 a,b 满足 （　　）.

(A) $a^2=4b+4$　(B) $a\neq 0,\ a^2=4b+4$

(C) $a\neq 0,\ b=-1$　(D) $a\neq 0, a^2=4b+4$ 或 $a\neq 0,\ b=-1$

二、填空题

5. 设 $A(-4,5)$，B 两点是圆心都在直线 $3x-2y+5=0$ 上的两相交圆的交点，则 B 的坐标为________.

6. 已知 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{2a^2-x^2}, a>0\}$，$N=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=a^2,\ a>0\}$，$M\cap N\neq\varnothing$，$a$ 的最大值与最小值的和

是________.

7. 已知 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{9-x^2},y\neq 0\}$，$N=\{(x,y)\mid y=x+b\}$，当 $M\cap N$ 为单元素时，b 的取值范围为________.

8. 圆 $x^2+y^2+x-6y+m=0$ 与直线 $x+2y-3=0$ 交于 P、Q 两点，O 为原点，$OP\perp OQ$，则 $m=$________.

9. 已知圆 $C:x^2+y^2-6x-4y+10=0$，直线 $l_1:y=mx$，直线 l_2：$3x+2y+10=0$ 且 l_1 截圆 C 所得弦的中点是 P，l_1、l_2 的交点是 Q，O 为原点，$|OP|\cdot|OQ|$的值是________.

10. 已知对于圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点 $P(x,y)$，使不等式 $x+y+m\geqslant 0$ 恒成立，m 的取值范围是________.

11. 当 a 为任意不等于 1 的实数时，圆 $x^2-2ax+y^2+2(a-2)y+2=0$ 均与直线 l 相切，则直线 l 的方程是________.

三、解答题

12. 已知点 P 是圆 $C:(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 上的一点，它关于点 $A(5,0)$的对称点是 Q，将半径 CP 绕圆心 C 依逆时针方向旋转 $90°$到 CR，当点 P 在圆 C 上移动时，求$|RQ|$的最值.

13. 设正三角形 ABC 的内切圆与三边 BC、AB、AC 的切点分别为 D、E、F，若劣弧$\overset{\frown}{EF}$上任一点 P 到三边距离分别为 p,q,r. 求证：$p^{\frac{1}{2}}+r^{\frac{1}{2}}=q^{\frac{1}{2}}$.

14. (1) 求证：过两定点(x_1,y_1)、(x_2,y_2)的圆系方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+k[(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)]=0, \quad ①$$

其中 k 为参数.

(2) 求与已知圆：$x^2+y^2-7y+10=0$ 相交、所得公共弦平行于已知直线 $2x-3y-1=0$，且过点$(-2,3)$、$(1,4)$的圆方程.

15. 已知定圆 C_1 和两定点 M、N，圆心 C_1 不在线段 MN 的中垂线上，过 M、N 任作圆 C_2 与圆 C_1 相交于两点 P、Q. 求证：直线 PQ 必过一定点.

第十讲　曲线方程

知识点和方法述要

探求曲线方程的方法具有多样性和灵活性.基本方法是“直译”.具体步骤可分为:①建立坐标系,写出点的坐标;②写出确定点集的条件;③代换成方程;④化简方程;⑤证明.前四步说明了曲线上的动点适合所求方程.第五步证明坐标适合方程的点在曲线上,实际解题中往往省略或作些必要说明,或去掉不符合条件的点或增加符合条件的点.以下几种方法也是常用的:

(1) 将动点轨迹化归于某一基本轨迹,直接得到曲线方程.

(2) 采用待定系数法.先确定动点轨迹的基本类型,写出含有待定系数的方程,利用题设条件,进一步确定待定系数,得到曲线方程.

(3) 采用代入法.步骤如下:

(i) 设轨迹上的动点 $P(x,y)$外,还要引进已知轨迹方程的动点 M 的坐标(x_0,y_0);

(ii) 找到所求动点 P 的坐标(x,y)与点 M 的坐标(x_0,y_0)之间的关系式

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0,x,y)=0, \\ F_2(x_0,y_0,x,y)=0; \end{cases}$$

(iii) 用 x,y 来代替 x_0、y_0,即得

$$\begin{cases} x_0=f_1(x,y), \\ y_0=f_2(x,y); \end{cases}$$

(iv) 将上式代入(x_0,y_0)所满足的方程 $F(x,y)=0$,得

$$F(x_0,y_0)=0,$$

即得 $F(f_1(x,y),f_2(x,y))=0$ 为所求轨迹方程.

(4) 求参数方程.当动点坐标与某些变量(如角度、距离、线段

比)有关时,选择这些变量为参数,建立方程组.或消去参数得普通方程,或保留一个参数成曲线的参数方程:

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t). \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

曲线与曲线方程是一种对应关系.不少问题的最终目的是研究曲线,曲线方程的求得只是作为研究曲线的工具,这正是解析几何的根本宗旨之一.

例 题 精 讲

例1 已知一椭圆及焦点 F, A 为椭圆上一动点,求线段 FA 中点 P 的轨迹方程.

分析一 点 P"依附"于 A, A 为已知椭圆上一动点,可以用点 P 的坐标关系式表示点 A 坐标代入椭圆方程求解.

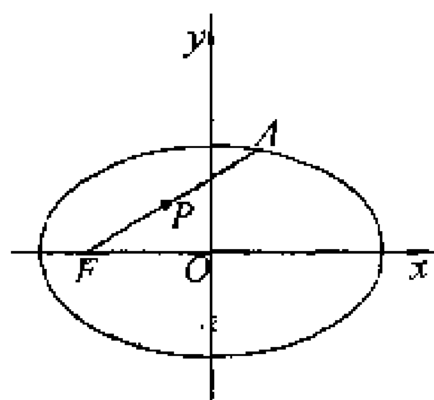


图 10-1

如图 10-1,建立直角坐标系,设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,各点坐标为 $F(-c,0)$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $A(x_0,y_0)$, $P(x,y)$.则

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1. \quad ①$$

根据中点公式,得 $x=\frac{x_0-c}{2}$, $y=\frac{y_0}{2}$,即 $x_0=2x+c$, $y_0=2y$.代入①得

$$\frac{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{4}}=1.$$

即得所求曲线方程.

若设 A 为 $(a\cos\phi, b\sin\phi)$,则可得点 P 的参数方程

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\cos\phi - c}{2}, \\ y = \dfrac{b\sin\phi}{2}. \end{cases}$$ （t 为参数）

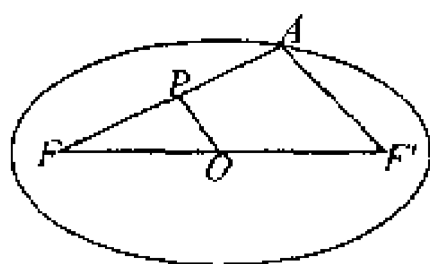


图 10－2

分析二 考虑直接化归为基本轨迹的可能性.注意到点 P 是 FA 的中点,如图 10－2,设已知椭圆的另一焦点是 F',中心 O,长轴长 $2a$,连 $F'A$,PO.

$$|AF| + |AF'| = 2a, \quad ①$$

$$|FP| = \frac{1}{2}|FA|, \quad ②$$

$$|PO| = \frac{1}{2}|FA|. \quad ③$$

由①、②、③知

$$|FP| + |OP| = a > |OF|,$$

所以点 P 的轨迹是椭圆.再以 OF 所在直线为 x 轴,OF 的中垂线为 y 轴建立坐标系,所求轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{4}} = 1.$$

分析三 用极坐标求解.设已知椭圆方程为

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}, \quad ①$$

A 点坐标为(ρ_0, θ_0),P 点坐标为(ρ, θ),则

$$\begin{cases} \rho_0 = 2\rho, \\ \theta_0 = \theta. \end{cases} \quad ②$$

因 A 点在已知椭圆上,由①,②可得

$$\rho = \frac{ep}{2(1 - e\cos\theta)}$$

此即为所求.

例 2 两定圆的半径长均为 r,有一动圆 P 分别与两圆内切与

外切.试求动圆圆心 P 的轨迹.

分析 根据两定圆 O_1、O_2 的位置不同,分两圆相交、两圆外离、两圆外切三种情况分别考察点 P 与两圆心 O_1、O_2 间距离的数量关系.

如图 10－3,建立坐标系.令 $|O_1O_2|=2c$.两定圆半径为 r,动圆和两定圆的切点为 Q_1、Q_2、O_1O_2 中点为原点 O.

(ⅰ)当两圆 O_1、O_2 相交时,$c<r$.因

$|PO_1|+|PO_2|=|Q_1O_1|+|Q_2O_2|=2r$,

由椭圆定义,点 P 的轨迹是以 O_1、O_2 为焦点,焦距为 $2c$,长轴长为 $2r$ 的椭圆,它的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2-c^2}=1. \quad ①$$

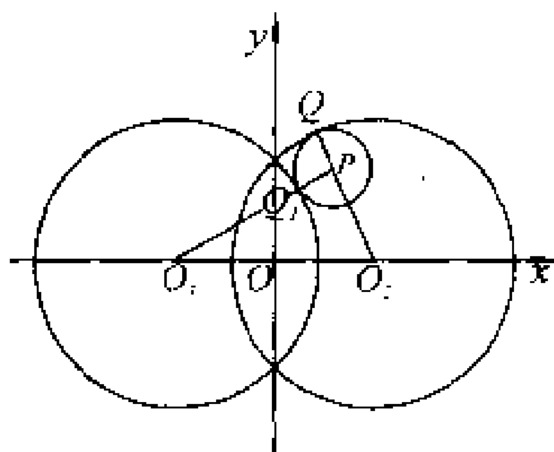


图 10－3

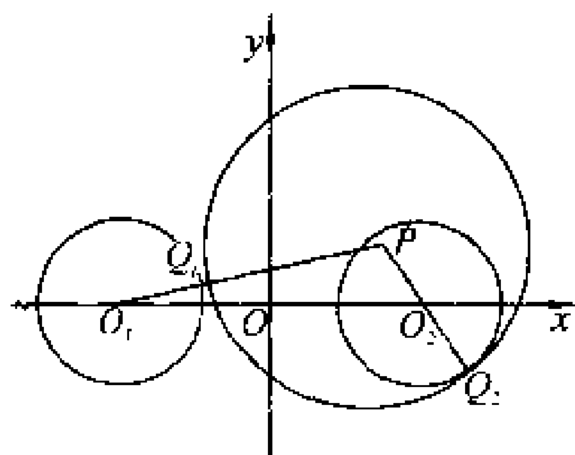


图 10－4

(ⅱ)当两圆 O_1、O_2 外离时,$c>r$,如图 10－4,因 $|PO_1|-|PO_2|=(|PQ_1|+r)-(|PQ_2|-r)=2r$,或 $|PO_2|-|PO_1|=(|PQ_1|+r)-(|PQ_1|-r)=2r$,由双曲线定义,点 P 的轨迹是以 O_1、O_2 为焦点,焦距为 $2c$,实轴长为 $2r$ 的双曲线,它的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{c^2-r^2}=1. \quad ②$$

(ⅲ)当两圆 O_1、O_2 相切时,$c=r$,如图 10－5.显然 P 点在连心线 O_1O_2 上,其轨迹即 x 轴(点 O 看作点圆),方程为

$$y=0 \quad ③$$

方程①、②、③可合并写成

$(r^2-c^2)x^2+r^2y^2=r^2(r^2-c^2).$

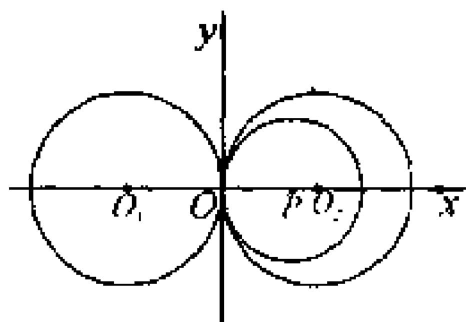


图 10-5

例3 F 是定点，l 是定直线，点 F 到直线 l 的距离为 $p(p>0)$，点 M 在直线 l 上滑动，动点 N 在 MF 的延长线，且满足条件

$$\frac{|FN|}{|MN|}=\frac{1}{|MF|}, \qquad ①$$

求动点 N 的轨迹.

分析 由①得

$|FN|\cdot|MF|=|MN|=|MF|+|NF|$

故 $|FN|$ 取决于 $|MF|$，而 $|MF|=\frac{p}{\cos\angle MFK}$，这启发我们建立极坐标系. 如图 10-6，作 $FK\perp l$，垂足为 K，以 F 为极点，FK 反向延长线为极轴，建立极坐标系. 设动点 N 坐标为 (ρ,θ)，根据题意，不妨取 $\rho>0,\cos\theta>0$. 因 $|MF|=\frac{p}{\cos\theta}$，$|FN|=\rho$，所以

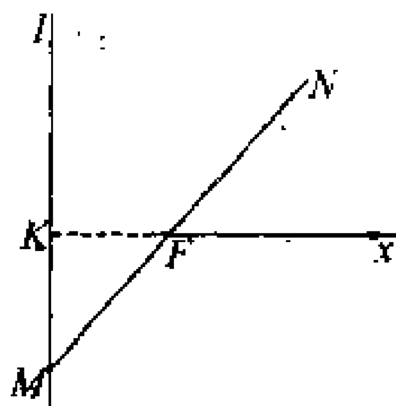


图 10-6

$$|MN|=|MF|+|FN|=\frac{p}{\cos\theta}+\rho.$$

由①得 $\frac{p}{\cos\theta}\cdot\rho=\frac{p}{\cos\theta}+\rho$，即

$$\rho=\frac{1}{1-\frac{1}{p}\cos\theta}(0<\cos\theta<p).$$

设过极点 F 且与极轴垂直的直线为 l'，则

（ⅰ）当 $e=\frac{1}{p}>1$，即 $0<p<1$ 时，所求轨迹是双曲线在直线 l' 右边的部分，见图 10-7(1).

（ⅱ）当 $e=\frac{1}{p}=1$，即 $p=1$ 时，所求轨迹是抛物线在直线 l' 右边的部分，见图 10-7(2).

（ⅲ）当 $0<e=\dfrac{1}{p}<1$，即 $p>1$ 时，所求轨迹是椭圆在直线 l' 右边的部分，见图 10－7(3).

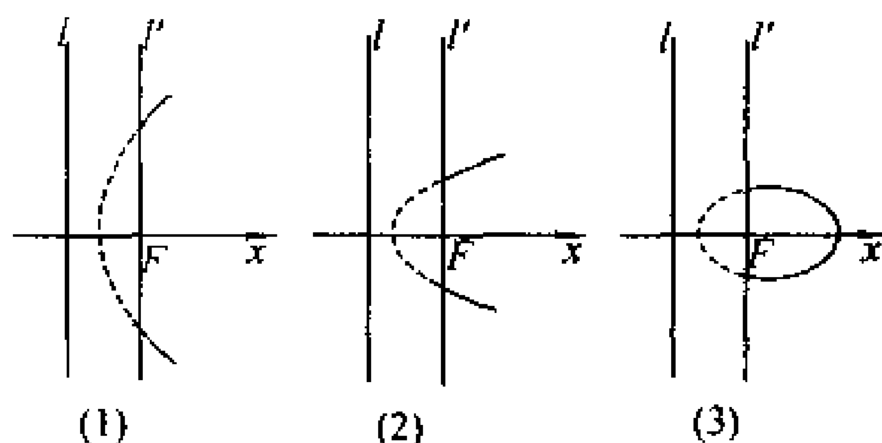


图 10－7

例 4 已知两点 $P(-2,2)$、$Q(0,2)$ 以及一条直线 $l: y=x$，设长为 $\sqrt{2}$ 的线段 AB 在直线 l 上移动（如图 10－8），求直线 PA 和 QB 交点 M 轨迹的普通方程.

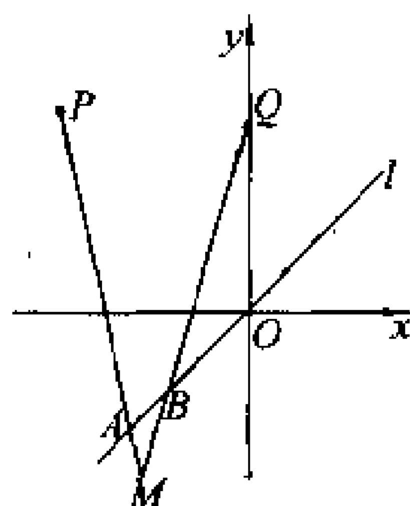


图 10－8

分析 注意到线段 $|AB|=\sqrt{2}$，且 AB 在 l 上移动可设 $A(a,a)$、$B(a+1,a+1)$. a 是参数，$M(x,y)$. 于是

$$PA: y-2=\frac{a-2}{a+2}(x+2),(a\neq-2) \quad ①$$

$$QB: y-2=\frac{a-1}{a+1}x,(a\neq-1) \quad ②$$

为保证 PA、QB 能相交，必须

$$\frac{a-2}{a+2}\neq\frac{a-1}{a+1},$$

即 $a\neq0$. 由①得

$$(a-2)(x+2)-(a+2)(y-2)=0,$$

即

$$(x-y+4)a=2(x+y). \quad ③$$

同理，由②得

$$(x-y+2)a=x+y-2. \quad ④$$

当 $a\neq0$ 时，从③，④消去 a，即得方程

$$x^2-y^2+2x-2y+8=0.$$

例5 A、B 分别是直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$ 上的两点，O 为坐标原点，且 $|OA|\cdot|OB|=a^2+b^2$. 求 AB 中点 M 的轨迹方程.

分析 设 $A(x_1,\frac{b}{a}x_1)$，$B(x_2,-\frac{b}{a}x_2)$，依题设，有

$$|OA|=\sqrt{(1+\frac{b^2}{a^2})x_1^2},\ |OB|=\sqrt{(1+\frac{b^2}{a^2})x_2^2}.$$

故

$$a^2+b^2=|OA|\cdot|OB|=\frac{a^2+b^2}{a^2}|x_1x_2|,$$

有 $\quad |x_1x_2|=a^2.$ ①

设 $M(x,y)$，因 M 是线段 AB 的中点，则

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\\ y=\frac{1}{2}(\frac{b}{a}x_1-\frac{b}{a}x_2),\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2x=x_1+x_2, & ②\\ \frac{2a}{b}y=x_1-x_2. & ③\end{cases}$$

由①，②，③可得

$$x^2-\frac{a^2}{b^2}y^2=x_1x_2=\pm a^2.$$

故点 M 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$.

也可以设 $A(at,bt)$、$B(as,bs)$、$M(x,y)$. 依题设. 有

$$\begin{cases}x=\frac{a}{2}(t+s),\\ y=\frac{b}{2}(t-s),\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{a}=t+s,\\ \dfrac{2y}{b}=t-s.\end{cases}$$

进而得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=ts. \qquad ④$$

只须求出 ts,代入④便得轨迹方程.

因 $|OA|\cdot|OB|=a^2+b^2$,于是

$$\sqrt{(a^2+b^2)t^2}\cdot\sqrt{(a^2+b^2)s^2}=a^2+b^2.$$

有 $ts=\pm1$,代入④便得点 M 的轨迹方程.

例6 如图 10-9,$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$,AB 边在直线 $l: x=3$ 上移动,求此三角形外心的轨迹方程.

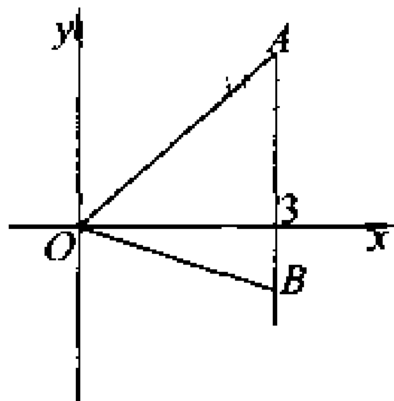


图 10-9

分析 围绕关键点选择参数. 设 $A(3,3\tan\theta)$,则 $B(3,3\tan(\theta-\frac{\pi}{3}))$,$AB$ 的中垂线方程为

$$y=\frac{3}{2}[\tan\theta+\tan(\theta-\frac{\pi}{3})]. \qquad ①$$

线段 OA 的中点为$(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\tan\theta)$,它的中垂线方程为

$$y-\frac{3}{2}\tan\theta=-(x-\frac{3}{2})\cot\theta. \qquad ②$$

由①、②解得

$$x=\frac{3}{2}[1-\tan\theta\cdot\tan(\theta-\frac{\pi}{3})]. \qquad ③$$

观察①、③,可利用

$$\tan[\theta-(\theta-\frac{\pi}{3})]=\frac{\tan\theta-\tan(\theta-\frac{\pi}{3})}{1+\tan\theta\cdot\tan(\theta-\frac{\pi}{3})} \quad ④$$

直接消去参数 θ.

由①得

$$\tan\theta+\tan(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{2}{3}y. \quad ⑤$$

由③得

$$\tan\theta\cdot\tan(\theta-\frac{\pi}{3})=1-\frac{2}{3}x. \quad ⑥$$

由④得

$$3[1+\tan\theta\cdot\tan(\theta-\frac{\pi}{3})]^2=[\tan\theta+\tan(\theta-\frac{\pi}{3})]^2-4\tan\theta\cdot\tan(\theta-\frac{\pi}{3}). \quad ⑦$$

将⑤,⑥代入⑦化简即得

$$\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1.$$

注 以角为参数时,常借助三角恒等式消参.

例 7 在平面直角坐标系中,有折线 $y=|x|$,在△ABC 中$\angle ACB=90^\circ$, $CA=CB=\sqrt{2}$,顶点 A,B 分别在射线$y=-x(x<0)$与射线 $y=x(x>0)$上运动.点 C 位于$y>|x|$的区域内,如图 10-10 所示.求△ABC 重心 G 的轨迹方程.

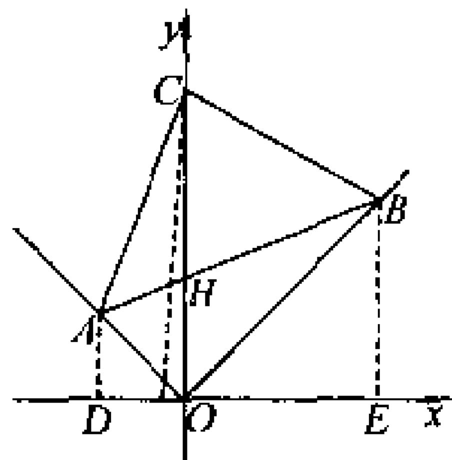


图 10-10

分析 依题设,$|AB|=2$.当 A 的位置确定后,点 B 也随之确定,点 C 也是如此.只是直接用 A 点坐标表达B、C 较为困难.注意改变观察角度:点 A 的位置与$\angle BAO$ 具有

一一映射关系.尝试以$\angle BAO$为参数.设其θ,$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$.并设$D$、$E$、$F$分别是$A$、$B$、$C$在$x$轴上投影.$A$点在$CF$上投影为$B$.于是$|OA|=2\cos\theta$,$\angle CAH=\angle CAB+\angle BAH=45^\circ+\angle BAH=\angle OAH+\angle BAH=\angle BAO=\theta$,$|HC|=\sqrt{2}\cdot\sin\theta$,$|HA|=\sqrt{2}\cos\theta$,$A(-\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\cos\theta)$.

设C点坐标为(x_c,y_c),则

$$x_c=OD-HA=-\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\cos\theta=0,$$

这表明C点在y轴上,亦即C,H,F在y轴上,F就是原点O.

$y_c=OH+HC=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)$.

因$|OB|=2\sin\theta$,故点B的坐标为$(\sqrt{2}\sin\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$.设$\triangle ABC$重心$G(x,y)$,则

$$x=\frac{-\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}(\sin\theta-\cos\theta),\qquad ①$$

$$y=\frac{\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)+\sqrt{2}\sin\theta}{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}(\sin\theta+\cos\theta).\qquad ②$$

由①、②得

$$\frac{x^2}{\frac{4}{9}}+\frac{y^2}{\frac{16}{9}}=1.$$

又由②知

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}<y=\frac{4}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{4}{3}\quad\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

故所求轨迹为椭圆的一部分,其方程为

$$\frac{x^2}{\frac{4}{9}}+\frac{y^2}{\frac{16}{9}}=1\quad\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}<y\leqslant\frac{4}{3}\right).$$

例8 点A、B、C依次在直线l上,且$AB=4BC$.过C作l的垂线,M是这一直线上的动点.以A为圆心,AB为半径作圆,MT_1与

MT_2 是这一圆的切线. 确定 $\triangle MT_1T_2$ 的垂心 H 的轨迹.

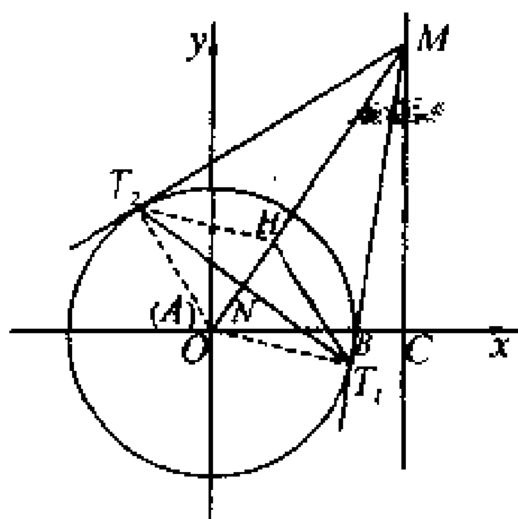


图 10-11

分析 连 T_1H、T_2H、AT_1、AT_2，因 H 是 $\triangle MT_1T_2$ 的垂心，MT_1、MT_2 是圆 A 的切线，所以 $T_1H \parallel AT_2$，$T_2H \parallel AT_1$，四边形 AT_1HT_2 是菱形.

根据图形特点，以 A 为原点，直线 AB 为 x 轴建立坐标系(如图 10-11 所示)，且设 $BC=1$. 这样一来，圆 A 的方程即为 $x^2+y^2=16$. 令点 M 的坐标为 $(5,b)$，M 点所确定的圆的切点弦 T_1T_2 的方程为

$$5x+by=16, \qquad ①$$

直线 AN 的方程为

$$y=\frac{b}{5}x. \qquad ②$$

设直线 OM 与 T_1T_2 交于 N. 由于 $OH=2\cdot ON$，所以只要能得到点 N 的轨迹方程即可通代换得点 H 的轨迹方程:这一点不难做到. 由①、②消去 b 得点 N 轨迹方程:

$$5x^2+5y^2-16x=0. \qquad ③$$

设 H 点坐标为 (x,y)、N 点坐标为 (x_0,y_0). 由③得

$$5x_0^2+5y_0^2-16x_0=0. \qquad ④$$

又 $x=2x_0$，$y=2y_0$，将它们代入④，化简得

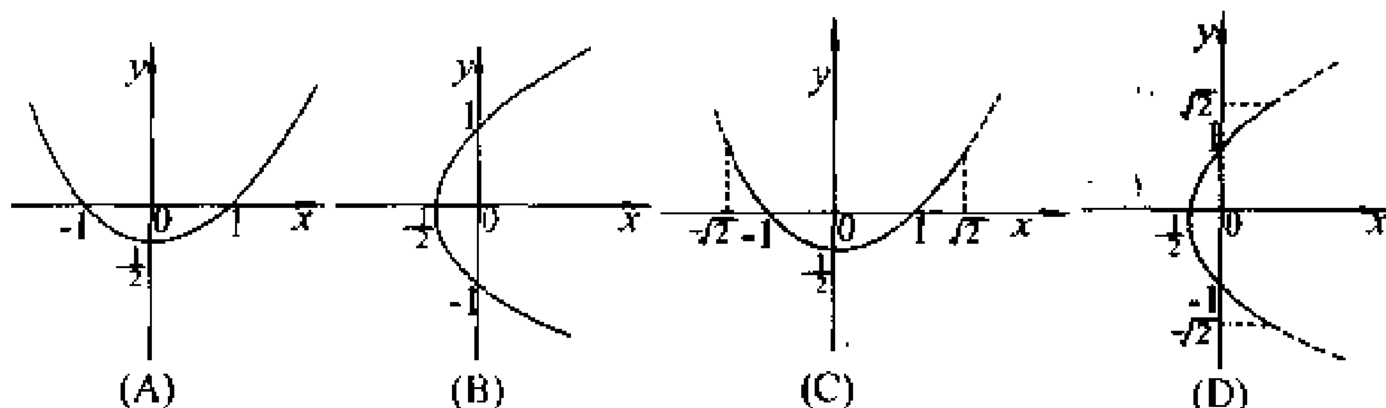
$$\left(x-\frac{16}{5}\right)^2+y^2=\left(\frac{16}{5}\right)^2.$$

在线段 AB 上取点 K，使 $AK=\frac{4}{5}AB$，所求轨迹是以 K 为圆心，AK 为半径的圆.

练 习 十

一、选择题

1. 已知 $\sin\theta,\cos\theta$ 是方程 $x^2+px+q=0(p、q\in\mathbf{R})$ 的两根，则动点 (p,q) 的轨迹是 （　　）.



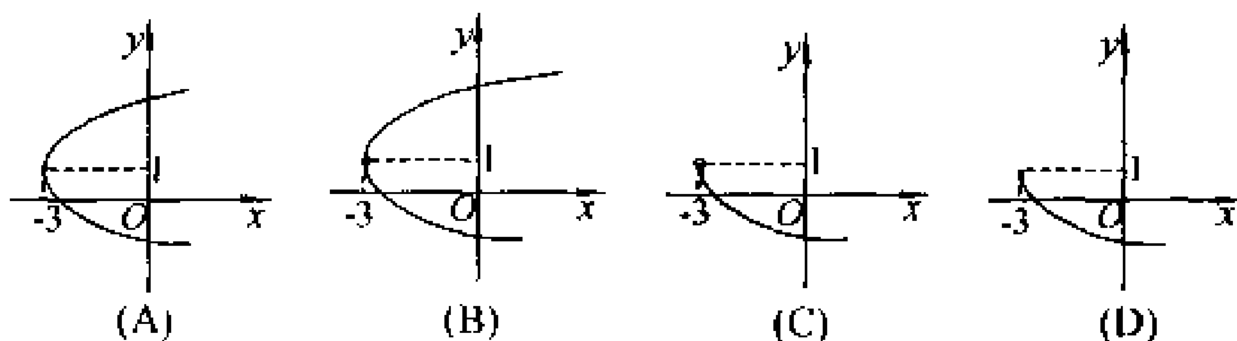
（第 1 题）

2. A 为半径为 R 的定圆 O 上一定点，B 是 $\odot O$ 上任一点，点 P 是 A 关于点 B 的对称点，则点 P 的轨迹是 （　　）.

(A) 抛物线的一部分　　(B) 椭圆

(C) 双曲线的一部分　　(D) 圆

3. 设平面直角坐标系内的点 P 的坐标 (x,y) 使：$0,\log_2(1-y),\log_2(x+3)$ 成等差数列，则点 P 的轨迹是 （　　）.



（第 3 题）

4. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x=3\cos\theta,y=3\sin\theta,0<\theta<\pi\}$ 与集合 $N=\{(x,y)\mid y=x+b\}$ 满足 $M\cap N\neq\varnothing$，则 b 满足 （　　）.

(A) $-3\sqrt{2}\leqslant b\leqslant 3\sqrt{2}$　　(B) $-3\leqslant b\leqslant 3\sqrt{2}$

(C) $0 < b \leqslant 3\sqrt{2}$　　　　(D) $-3 < b \leqslant 3\sqrt{2}$

5. 一动点到两相交直线的距离的平方和为定值 $m^2(>0)$，则动点的轨迹是　　（　　）.

(A) 椭圆　　　　(B) 圆

(C) 双曲线或椭圆　　　　(D) 椭圆或圆

6. 长为 a、$b(a \neq b)$的两条线段 AB、CD 分别在 x 轴、y 轴上滑动，且 A、B、C、D 四点共圆 M，则动圆圆心 M 的轨迹是　　（　　）.

(A) 一条直线　　　　(B) 两条直线

(C) 双曲线　　　　(D) 点(0,0)

二、解答题

7. 给定抛物线 $C: y^2 = 8(x+2)$，若其焦点与准线分别是椭圆的一个焦点与一条准线，求椭圆短轴端点的轨迹方程.

8. 设定点 $A(3,1)$，点 B 在抛物线 $y^2 = x+1$ 上运动，点 P 在线段 AB 上，且有 $BP : PA = 1:3$，求点 P 的轨迹方程，并指出此轨迹为何种曲线.

9. 已知 P 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的一个动点，$A'$、$A$ 是它长轴的两个端点，且 $AQ \perp AP$，$A'Q \perp A'P$，求点 Q 的轨迹.

10. 自双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上一动点 Q 引直线 $L: x+y=2$ 的垂线，垂足为 N，求线段 QN 中点 P 的轨迹方程.

11. 已知平面上两定点 $A(-a,0)$、$B(a,0)$，$(a>0)$，动点 P 与定点 A、B 构成$\triangle ABP$，且使$\angle B = 2\angle A$. 求点 P 的轨迹.

12. 设等腰$\triangle ABO$ 的顶角 O 为 2θ，高为 h，在$\triangle AOB$ 内有一动点 P 到三边 OA、OB、AB 的距离分别为 $|PD|$、$|PF|$、$|PE|$，并且满足 $|PD| \cdot |PF| = |PE|^2$，求点 P 的轨迹.

13. 设有一动直线 l，过定点 $A(2,0)$且与抛物线 $y = x^2 + 2$ 相交于不同的两点 B 和 C，点 B、C 在 x 轴上的射影分别是 B'、C'，P 是线段 BC 上的点，满足 $BP : PC = |BB'| : |CC'|$. 求$\triangle POA$ 的重心 Q 的轨迹方程.

第十一讲　二次(非圆)曲线

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 二次(非圆)曲线包括椭圆、双曲线、抛物线. 椭圆是到两定点距离的和等于常数(大于两点间距离)的定点的轨迹;双曲线是到两个定点的距离的差的绝对值等于常数(小于两点的距离)的点的轨迹;抛物线为到定点和到定直线距离相等的点的轨迹. 与定点和定直线的距离的比等于常数 e 的点的轨迹则可看作二次(非圆)曲线的统一定义.

2. 在坐标平面上,有

(1) 椭圆的焦点为 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$,标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

参数方程可为

$$\begin{cases}x=a\cos\phi,\\ y=b\sin\phi.\end{cases}\quad(\phi\text{ 为参数})$$

准线方程为 $x=\pm\frac{a^2}{c}$. 对于椭圆上一点 $P(x,y)$,焦半径 $|F_1P|=a+ex$, $|F_2P|=a-ex$.

(2) 双曲线的焦点为 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$时,标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 准线方程为 $x=\pm\frac{a^2}{c}$,渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,对于双曲线左支上一点 $P(x,y)$,焦半径 $|PF_1|=-ex-a$, $|PF_2|=a-ex$;右支上一点 $Q(x,y)$, $|QF_1|=ex+a$, $|QF_2|=ex-a$.

(3) 抛物线的焦点为 $F(\frac{p}{2},0)$,顶点在原点的抛物线方程为

$y^2=2px$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，参数方程为

$$\begin{cases}x=2pt^2,\\ y=2pt.\end{cases}(t\text{ 为参数})$$

(4) 二次(非圆)曲线的极坐标方程为 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$，其中对于双曲线，允许 $\rho<0$.

3. 对于中心不在原点，对称轴与坐标轴平行的二次(非圆)曲线，利用平移坐标公式即可得到相应的结果.

定义、基本形式及性质为我们研究二次(非圆)曲线奠定了基础，充分利用定义中所包含的几何属性则是我们解题中应注意的一个重要方面.

例 题 精 讲

例1 已知双曲线的两条渐近线方程为 $3x-4y-2=0$ 和 $3x+4y-10=0$，一条准线方程为 $5y+4=0$，求双曲线方程.

分析 两条渐近线的交点即为双曲线的中心. 解方程组 $\begin{cases}3x-4y-2=0,\\ 3x+4y-10=0,\end{cases}$ 得中心 $O'(2,1)$. 由准线方程 $y=-\frac{4}{5}$ 可知它的实轴平行于 y 轴，故可设双曲线方程为 $\frac{(y-1)^2}{a^2}-\frac{(x-2)^2}{b^2}=1$. 下面只须用待定系数法求 a,b，由它的渐近线方程为 $\frac{(y-1)}{a}\pm\frac{(x-2)}{b}=0$，即 $y-1=\pm\frac{a}{b}(x-2)$，对照题设得 $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$，将原坐标系平移使 O' 为新坐标系原点，则双曲线方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，由平移公式 $x'=x-2$，$y'=y-1$，在新坐标系下准线方程 $y'=-\frac{9}{5}$，即 $\frac{a^2}{c}=\frac{9}{5}$. 由方程组

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{a^2}{c}=\dfrac{9}{5},\\ a^2+b^2=c^2.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a^2=9,\\ b^2=16.\end{cases}$则所求双曲线方程为

$$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1.$$

例2 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1$与双曲线$\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1$有公共焦点$F_1$、$F_2$.设$P$为它们的一个交点,求$\angle F_1PF_2$和$\triangle PF_1F_2$的面积.

分析 如图11-1,椭圆和双曲线的交点是确定的.根据对称性,不妨设点P在第一象限,依题设,有

$|F_1F_2|^2=4(a_1^2-b_1^2)=4(a_2^2+b_2^2)=4c^2.$

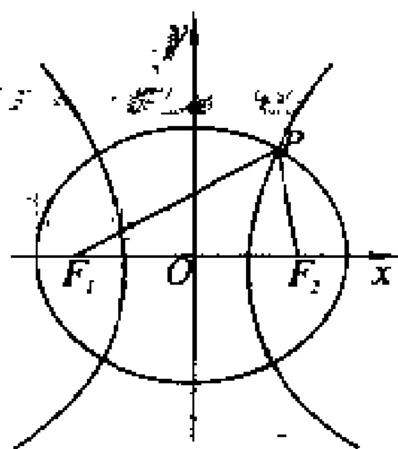


图11-1

容易想到,根据椭圆和双曲线定义可得到

$$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a_1,\\ |PF_1|-|PF_2|=2a_2.\end{cases}$$

解得$|PF_1|=a_1+a_2$,$|PF_2|=a_1-a_2$.

在$\triangle F_1PF_2$中,

$$\begin{aligned}\cos\angle F_1PF_2&=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}\\&=\frac{(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-(2c)^2}{2(a_1+a_2)(a_1-a_2)}\\&=\frac{(a_1^2-c^2)-(c^2-a_2^2)}{a_1^2-a_2^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{b_1^2 - b_2^2}{b_1^2 + b_2^2}. \qquad ①$$

从而有
$$\angle F_1PF_2 = \arccos \frac{b_1^2 - b_2^2}{b_1^2 + b_2^2}.$$

由①可得
$$\sin\angle F_1PF_2 = \frac{2b_1b_2}{b_1^2 + b_2^2}.$$

所以
$$S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| \sin\angle F_1PF_2 = b_1b_2.$$

例3 已知

(i) 半圆的直径 AB 长为 $2r$;

(ii) 半圆外的直线 l 与 BA 的延长线垂直,垂足为 T, $|AT| = 2a$ $(2a < \frac{r}{2})$;

(iii) 半圆上有相异两点 M、N,它们与直线 l 的距离 $|MP|$、$|NQ|$满足

$$\frac{|MP|}{|AM|} = \frac{|NQ|}{|AN|} = 1.$$

求证:$|AM| + |AN| = |AB|$.

分析 题设条件使我们自然联想到抛物线的定义.如图 11-2,建立坐标系,则 M,N 两点既在抛物线

$$y^2 = 4ax \qquad ①$$

上,又在圆

$$[x - (a + r)]^2 + y^2 = r^2 \qquad ②$$

上.由①,②得

$$x^2 + (2a - 2r)x + 2ra + a^2 = 0.$$

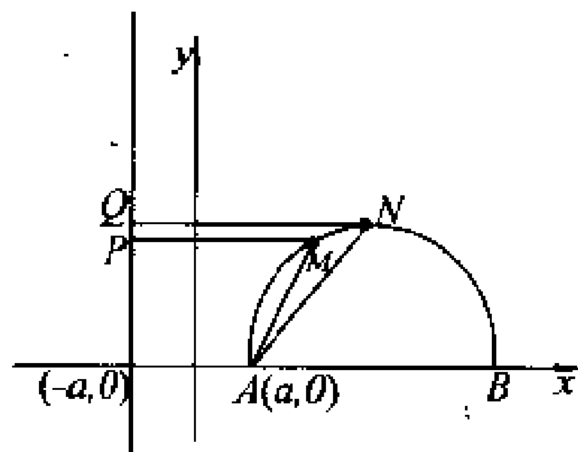


图 11-2

设点 M,N 的坐标分别为(x_1, y_1),(x_2, y_2),则

$$x_1 + x_2 = 2r - 2a. \qquad ③$$

又
$$|AM| = |MP| = x_1 + a, \qquad ④$$

$$|AN| = |NP| = x_2 + a, \tag{⑤}$$

$$|AB| = 2r, \tag{⑥}$$

由③、④、⑤、⑥可知命题成立.

运用极坐标有不少有利因素:在以 A 为极点,射线 AB 为极轴的坐标系下,点 M、N 坐标(ρ_1,θ_1),(ρ_2,θ_2). 满足半圆方程

$$\rho = 2r\cos\theta \qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \tag{⑦}$$

又满足抛物线方程

$$\rho = \frac{2a}{1-\cos\theta}, \tag{⑧}$$

现只须消去 θ,化简得

$$\rho^2 - 2r\rho + 4ra = 0. \tag{⑨}$$

根据韦达定理,有方程⑨的两根即$|AM|$、$|AN|$满足

$$|AM| + |AN| = \rho_1 + \rho_2 = 2r = |AB|.$$

例 4 设 A、B 是椭圆 $x^2+3y^2=1$ 上的两个动点,且 $OA \perp OB$(O 为原点),求$|AB|$的最大值和最小值.

分析 设点 A,B 的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2),那么,依题设条件有

$$x_1^2 + 3y_1^2 = 1, \tag{①}$$

$$x_2^2 + 3y_2^2 = 1, \tag{②}$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0, \tag{③}$$

且 $$|AB|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2. \tag{④}$$

由①得 $$y_1^2 = \frac{1}{3}(1 - x_1^2). \tag{⑤}$$

由②得 $$y_2^2 = \frac{1}{3}(1 - x_2^2). \tag{⑥}$$

将⑤、⑥代入④得

$$|AB|^2 = \frac{2}{3}(x_1^2 + x_2^2 + 1). \tag{⑦}$$

由③得 $$x_1^2x_2^2 = y_1^2y_2^2. \tag{⑧}$$

由⑤、⑥、⑧得

$$8x_1^2x_2^2+x_1^2+x_2^2-1=0,$$

即 $$(x_1^2+\frac{1}{8})(x_2^2+\frac{1}{8})=\frac{9}{64}. \quad ⑨$$

于是

$$\frac{(x_1^2+\frac{1}{8})+(x_2^2+\frac{1}{8})}{2}\geqslant\sqrt{(x_1^2+\frac{1}{8})(x_2^2+\frac{1}{8})}=\frac{3}{8}.$$

化简得 $$x_1^2+x_2^2\geqslant\frac{1}{2}. \quad ⑩$$

当且仅当 $x_1^2+\frac{1}{8}=x_2^2+\frac{1}{8}$，即 $x_1^2=x_2^2=\frac{1}{4}$ 时取等号．此时由⑦有 $|AB|_{\min}=1$．因

$$\begin{aligned}&[(x_1^2+\frac{1}{8})+(x_2^2+\frac{1}{8})]^2\\&=[(x_1^2+\frac{1}{8})-(x_2^2+\frac{1}{8})]^2+4(x_1^2+\frac{1}{8})(x_2^2+\frac{1}{8})\\&=(x_1^2-x_2^2)^2+\frac{9}{16},\end{aligned}$$

所以，当 $|x_1^2-x_2^2|$ 取最大值时，$(x_1^2+\frac{1}{8})+(x_2^2+\frac{1}{8})$ 有最大值．注意到 x_1^2、$x_2^2\in[0,1]$，故当 $x_1^2=1,x_2^2=0$ 或 $x_1^2=0,x_2^2=1$ 时，$(x_1^2+\frac{1}{8})+(x_2^2+\frac{1}{8})$ 取最大值 $1\frac{1}{4}$，再由⑦知此，时 $|AB|_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

也许有人想到了利用椭圆的参数方程，并且认为在 $OA\perp OB$ 的条件下可设 A、B 两点的坐标分别为 $(\cos\varphi,\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\varphi)$、$(\cos(\varphi+\frac{\pi}{2}),\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\varphi+\frac{\pi}{2}),0\leqslant\varphi<\pi)$，再通过两点间距离公式求解，想法中有不少合理成份，然而，角 φ 对应离心角，通常情况下若上述点 A、B 的表示正确的话，则 OA 与 OB 彼此就不垂直，上述表示方式是错误的．能否改进一下呢？可以，联想三角函数定义方式．设 $|OA|=r_1$，

$|OB|=r_2$,点 A、B 的坐标为 $A(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$、$B(r_2\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$,
$r_2\sin(\theta+\frac{\pi}{2}))$,分别代入椭圆方程得

$$\begin{cases} r_1^2\cos^2\theta+3r_1^2\sin^2\theta=1, \\ r_2^2\cos^2(\theta+\frac{\pi}{2})+3r_2^2\sin^2(\theta+\frac{\pi}{2})=1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} r_1^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta+3\sin^2\theta}, \\ r_2^2=\dfrac{1}{\sin^2\theta+3\cos^2\theta}, \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= r_1^2+r_2^2 \\ &= \frac{1}{\cos^2\theta+3\sin^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta+3\cos^2\theta} \\ &= \frac{4}{(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)\cdot(\sin^2\theta+3\cos^2\theta)}. \end{aligned} \quad ⑪$$

令 $x=(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)\cdot(\sin^2\theta+3\cos^2\theta)$,则

$4x=[(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)+(\sin^2\theta+3\cos^2\theta)]^2-[(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)-(\sin^2\theta+3\cos^2\theta)]^2$,

化简得 $$x=4-\cos^2 2\theta,$$

所以 $3\leqslant x\leqslant 4$. 由⑪,⑫得

$$1\leqslant |AB|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

当 $\cos^2\theta=\sin^2\theta$,即 $\tan\theta=\pm 1$ 时,$|AB|_{\min}=1$;当 $\cos^2\theta=1$ 或 $\sin^2\theta=1$ 时,$|AB|_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 5 设一椭圆中心为坐标原点,长轴在 x 轴上,离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. 若圆 C

$x^2+(y-\frac{3}{2})^2=1$

上点与这椭圆上点的最大距离为 $1+\sqrt{7}$，试求这个椭圆的方程.

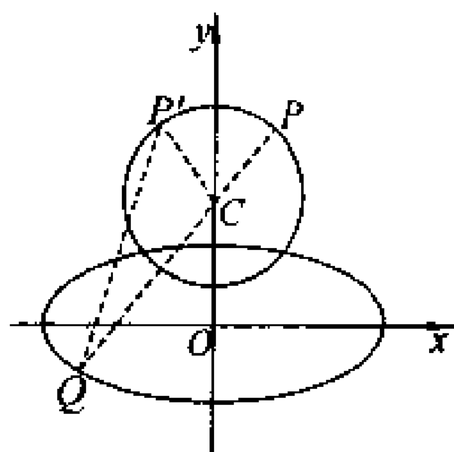


图 11－3

分析 如图 11－3，设点 P 在圆 C 上；点 Q 在所求椭圆上. 且 $|PQ|=1+\sqrt{7}$，则 P、C、Q 三点共线. 因为对于圆 C 上异于 P 的一点 P'，有

$$|CP'|+|CQ'|>|P'Q|,$$

即 $$|QP|>|P'Q|.$$

$|P'Q|$ 不可能有最大值 $1+\sqrt{7}$. 因此，问题中部分条件可进一步明确为定点 $C(\frac{3}{2},0)$ 与椭圆上点的最大距离为 $\sqrt{7}$. 设椭圆的方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \end{cases} \quad (\theta\text{ 为参数})$$

于是 $$|CQ|^2=x^2+(y-\frac{3}{2})^2$$

$$=a^2\cos^2\theta+(b\sin\theta-\frac{3}{2})^2. \qquad ①$$

因为 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-(\frac{c}{a})^2}=\sqrt{1-e^2}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{2},$$

即 $$a=2b. \qquad ②$$

②代入①得

$$|CQ|^2=-3b^2(\sin\theta+\frac{1}{2b})^2+4b^2+3. \qquad ③$$

若 $\frac{1}{2b}>1$，即 $b<\frac{1}{2}$，则 $\sin\theta=-1$ 时，$|CQ|$ 有最大值，由③得

$$(b+\frac{3}{2})^2=7. \qquad ④$$

由④得

$$b=\sqrt{7}-\frac{3}{2}>\frac{1}{2},$$

导致矛盾，因此，$b\geqslant\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2b}\leqslant 1$，此时

$$|CQ|^2_{\max}=4b^2+3=7,$$

从而 $b=1$，代入②又得 $a=2$，所求椭圆方程为

$$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=\sin\theta.\end{cases}\quad(\theta\text{ 为参数})$$

例 6 在双曲线$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{13}=1$的一支上不同的三点 $A(x_1,y_1)$、$B(\sqrt{26},6)$、$C(x_2,y_2)$与焦点 $F(0,5)$的距离成等差数列，证明线段 AC 的垂直平分线 l 经过某一定点，并指出该点所对应的坐标.

分析 由双曲线方程知 $a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{13}$，$c=5$，可见焦半径

$$|AF|=ey_1-a=\frac{5\sqrt{3}}{6}y_1-2\sqrt{3},\qquad ①$$

$$|BF|=6e-a=\frac{5\sqrt{3}}{6}\times 6-2\sqrt{3}=3\sqrt{3},\qquad ②$$

$$|CF|=ey_2-a=\frac{5\sqrt{3}}{6}y_2-2\sqrt{3},\qquad ③$$

又

$$2|BF|=|AF|+|CF|,\qquad ④$$

将①、②、③代入④得

$$\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}y_1-2\sqrt{3}\right)+\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}y_2-2\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}.$$

化简得

$$y_1+y_2=12\qquad ⑤$$

线段 AC 的中点为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},6\right)$，依题设线段 AC 中垂线的方程为

$$y-6=\frac{-x_1+x_2}{y_1-y_2}\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right).\qquad ⑥$$

根据双曲线的一支关于实轴的对称性，可以联想到直线上所求定点在实轴即 y 轴上. 因此，我们可以转而证明直线 l 与 y 轴的交点即为定点.

令 $x=0$,由⑥得

$$y=\frac{x_1^2-x_2^2}{2(y_1-y_2)}+6, \qquad ⑦$$

注意到

$$\frac{y_1^2}{12}-\frac{x_1^2}{13}=1, \qquad ⑧$$

$$\frac{y_2^2}{12}-\frac{x_2^2}{13}=1, \qquad ⑨$$

⑧-⑨得

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{13}=\frac{y_1^2-y_2^2}{12},$$

即

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{y_1-y_2}=\frac{13}{12}(y_1+y_2). \qquad ⑩$$

将⑤代入⑩得

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{y_1-y_2}=13, \qquad ⑪$$

再将⑪代入⑦得到 $y=\frac{25}{2}$,所以直线 l 与 y 轴交点$(0,\frac{25}{2})$为定点.

例 7 已知曲线 $C_1:\frac{(x-a)^2}{2}+y^2=1$.直线 $l:x=-a-\frac{1}{8}$.若曲线 C_1 上存在四点,它们到点$(-a+\frac{1}{8},0)$与到直线 l 的距离相等,试求 a 的取值范围.

分析 到点$(-a+\frac{1}{8},0)$与到直线 $x=-a-\frac{1}{8}$ 距离相等的点在抛物线 $C_2:y^2=\frac{1}{2}(x+a)$上.曲线 C_1、C_2 有四个公共点的充要条件是方程组

$$\begin{cases}\frac{(x-a)^2}{2}+y^2=1, & ①\\ y^2=\frac{1}{2}(x+a) & ②\end{cases} \qquad (*)$$

有四组不同实数解.将②代入①整理得

$$x^2+(1-2a)x+a^2+a-2=0. \quad ③$$

设③的两根为 x_1,x_2,则

$$\begin{cases} x_1+x_2=2a-1, & ④\\ x_1\cdot x_2=a^2+a-2. & ⑤\end{cases}$$

方程组(*)有四组不同实数解的充要条件是

$$\begin{cases} \Delta=(2a-1)^2-4(a^2+a-2)>0, & ⑥\\ \frac{1}{2}(x_1+a)+\frac{1}{2}(x_2+a)>0, & ⑦\\ \frac{1}{2}(x_1+a)\cdot\frac{1}{2}(x_2+a)>0. & ⑧\end{cases}$$

由⑥得 $a<\frac{9}{8}$.将④,⑤代入⑦,⑧消去得

$$\frac{2a-1}{2}+a>0, \quad ⑨$$

$$(a^2+a-2)+a(2a-1)+a^2>0. \quad ⑩$$

由⑨得 $a>\frac{1}{4}$,由⑩得 $|a|>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

综上所述,$a\in(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{9}{8})$即为所求.

例 8 如果对称轴互相垂直的两条抛物线交于 A、B、C、D 四点.求证:四边形 $ABCD$ 的对角互补.

分析 欲证明四边形 $ABCD$ 的对角互补,只须证明这两条抛物线的交点共圆,也就是这些交点的坐标满足同一个圆的方程.建立直角坐标系,可设一抛物线方程为

$$y^2=2p_1x, \quad ①$$

另一抛物线方程为

$$(x-m)^2=2p_2(y-n). \quad ②$$

①+②得

$$x^2+y^2-(2p_1+2m)x-2p_2y+m^2+2p_2n=0. \quad ③$$

③为圆的方程,点 A、B、C、D 的坐标均满足③,所以四边形 $ABCD$ 为

该圆的内接四边形.

练 习 十 一

一、选择题

1. 椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$上有一点 P,它到左准线的距离为 10,那么它到右焦点的距离是 ( ).

(A) 8　(B) 10　(C) 12　(D) 15

2. 曲线$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$与曲线$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1(9<k<25)$有 ( ).

(A) 相等的长短轴　(B) 相等的焦距

(C) 相等的离心率　(D) 相等的准线

3. 双曲线方程$\frac{x^2}{|k|-2}+\frac{y^2}{5-k}=1$, k 的取值范围是 ( ).

(A) $k>5$　(B) $2<k<5$

(C) $-2<k<2$　(D) $-2<k<2$ 或 $k>5$

4. 已知曲线 $y^2=ax$ 与其关于点(1,1)对称的曲线有两个不同的交点.如果过这两个交点的直线的倾斜角为 45°,那么,实数 a 的值是 ( ).

(A) 2　(B) 4　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{4}$

5. 椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$焦点为 F_1、F_2.椭圆上的点 P 满足$\angle F_1PF_2=60°$,则$\triangle F_1PF_2$的面积是 ( ).

(A) $\frac{64\sqrt{3}}{3}$　(B) $\frac{9\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{64}{3}$

二、填空题

6. 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的准线方程为________.

7. P 为等轴双轴线 $x^2-y^2=a^2$ 上一点，$\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|PO|}$的取值范围是________.

8. 双曲线 $8kx^2-ky^2=8$ 的一个焦点是$(0,3)$，则 k 的值是________.

9. 以 y 轴为准线，恒过定点 $M(2,1)$，离心率 $e=\frac{1}{2}$且长轴最长的椭圆方程是________.

10. 以 y 轴为右准线，实轴长为 4，右顶点在抛物线 $y^2=x-1$ 上，离心率最小的双曲线的虚轴长为________.

11. A 为抛物线$x=-\frac{2}{7}y^2$ 上一点，F 为焦点，$|AF|=14\frac{7}{8}$. 过点 F 且与 OA 垂直的直线 l 的方程为________.

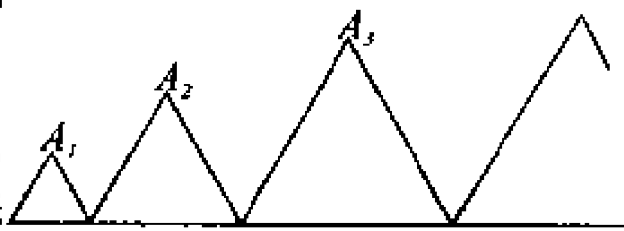
12. 椭圆$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$ 与抛物线 $y=x^2-m$ 有四个交点，则 m 的取值范围是________.

三、解答题

13. 求以长轴为一底的椭圆内接梯形的最大面积.

14. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，左、右焦点为 F_1、F_2，左准线为 l. 若在椭圆上存在一点 P，使得$|PF_1|$是 P 到 l 的距离 d 与$|PF_2|$的比例中项，试求离心率 e 的取值范围.

15. 如图所示，把边长分别为 1，3，5，…，$(2n-1)$，…的等边三角形底边放置在同一条直线上，且角顶靠角顶. 求证：它们底边所对的各顶点在同一条抛物线上，且各顶点到焦点距离都是整数.



（第 15 题）

16. 对于二次曲线系 $C_k:\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$. 证明：任取平面上一点 $P(a,b)(ab\neq0)$，总有 C_k 中一椭圆和一双曲线通过.

第十二讲　直线和二次曲线

知识点和方法述要

这里我们重点研究直线和二次曲线相关的位置关系及有关的度量问题.

1. 一般地,当斜率为 k 的直线 l 与二次曲线 C 交于 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$,且 x_1 与 x_2 满足方程 $ax^2+bx+c=0$ 时,根据韦达定理,有

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2&=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=(\frac{b}{a})^2-4\cdot\frac{c}{a}\\&=\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{\Delta}{a^2}\end{aligned}$$

线段 P_1P_2 的长度为

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}&=\sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2}\\&=\sqrt{(1+k^2)\cdot\frac{\Delta}{a^2}}\end{aligned}$$

2. 计算合理、简便,常成为问题解决中关注的焦点.要审时度势,选择适当的坐标系及直线方程形式,注意数形结合这一重要数学思想的运用.

例题精讲

例 1　给定双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(1) 过点 $A(2,1)$的直线 l 与所给的双曲线交于点 P_1 和 P_2,求

线段 P_1P_2 的中点的轨迹方程.

(2) 过点 $B(1,1)$,能否作直线 m 与双曲线交于两点 Q_1 和 Q_2,且使 B 点平分线段 Q_1Q_2? 如果 m 存在,则求它的方程;如果 m 不存在,则说明理由.

分析 (1)若直线 l 垂直于 x 轴,因其过点 $A(2,1)$,根据对称性,P_1P_2 中点为(2,0),否则设 l 的方程为

$$y-1=k(x-2),$$

即

$$y=kx+(1-2k), \quad ①$$

将①代入双曲线方程,消去 y 后得到

$$2x^2-[kx+(1-2k)]^2-2=0,$$

整理得

$$(2-k^2)x^2+2k(2k-1)x-(4k^2-4k+3)=0. \quad ②$$

这里,$k\neq\sqrt{2}$,且

$$\begin{aligned}\Delta&=[2k(2k-1)]^2+4(2-k^2)(4k^2-4k+3)\\&=8(3k^2-4k+3)>0.\end{aligned}$$

设 x_1,x_2 是方程②的两根,无须直接计算 x_1,x_2,根据韦达定理得

$$x_1+x_2=-\frac{2k(2k-1)}{2-k^2}=\frac{2k(2k-1)}{k^2-2}, \quad ③$$

由①,③得

$$\begin{aligned}y_1+y_2&=kx_1+(1-2k)+kx_2+(1-2k)\\&=k(x_1+x_2)+2(1-2k)\\&=k\cdot\frac{2k(2k-1)}{k^2-2}+2(1-2k)\\&=\frac{4(2k-1)}{k^2-2}. \quad ④\end{aligned}$$

设线段 P_1P_2 中点 P 坐标(x,y),由中点坐标公式及③,④得

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k(2k-1)}{k^2-2}, \quad ⑤$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2(2k-1)}{k^2-2},\qquad ⑥$$

⑤,⑥即为点 P 的参数方程,k 为参数,若消去 k 可得普通方程

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{7}{8}}-\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{4}}=1.\qquad ⑦$$

注意到点(2,0)的坐标满足⑦,故方程⑦即为所求.

(2) 设直线 m 的方程是

$$y-1=k(x-1)$$

即

$$y=kx+(1-k)\qquad ⑧$$

将⑧代入双曲线方程,消去 y 后得到

$$2x^2-[kx+(1-k)]^2-2=0,$$

整理得

$$(2-k^2)x^2+2k(k-1)x-(k^2-2k+3)=0.\qquad ⑨$$

设 x_3,x_4 是方程⑨的根,则

$$x_3+x_4=\frac{2k(k-1)}{k^2-2}.\qquad ⑩$$

将⑩代入⑧得

$$y_3+y_4=\frac{4(k-1)}{k^2-2}.\qquad ⑪$$

依题设,若存在满足要求的直线 m,则由⑩,⑪及中点公式得

$$\begin{cases}\dfrac{2k(k-1)}{k^2-2}=2,\\[2ex]\dfrac{4(k-1)}{k^2-2}=2.\end{cases}$$

解之得 $k=2$,将 $k=2$ 代入⑧得直线 m 的方程为

$$y=2x-1.\qquad ⑫$$

但将 $k=2$ 代入⑨得方程

$$2x^2-4x+3=0,$$

此方程根本无实根，可见直线 m 不存在.

注 根据问题的具体情形，绕开直接求解方程的计算及利用韦达定理得到所需关系是常见技巧，一种易犯的错误是忽视判别式作用，置其于不顾，直接运用韦达定理，如在本例(2)中导致直线 $y=2x-1$ 为所求的错误结论.

例2 已知倾斜角为 α 的直线 l 与椭圆 $E: x^2+3y^2=3$ 相交于 A、B 两点，直线 l 过椭圆 E 的左焦点 F_1，求 $|AB|$.

解一 依题设，椭圆 E 的左焦点为 $(-\sqrt{2},0)$. 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线 l 方程为 $x=-\sqrt{2}$，代入椭圆 E 的方程得 $|y|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，可见 $|AB|=\frac{2\sqrt{3}}{2}$.

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，设直线 l 方程为 $y=k(x+\sqrt{2})$，代入椭圆 E 的方程得

$$x^2+3[k(x+\sqrt{2})]^2=3, \qquad ①$$

化简得

$$(1+3k^2)x^2+6\sqrt{2}k^2x+6k^2-3=0, \qquad ②$$

其中

$$\Delta=(6\sqrt{2}k^2)^2-4(1+3k^2)(6k^2-3)=12(k^2+1). \quad ③$$

由①，②，③知

$$|AB|=\sqrt{(1+k^2)\frac{\Delta}{(1+3k^2)}}$$

$$=\sqrt{(1+k^2)\frac{12(1+k^2)}{(1+3k^2)}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}(1+k^2)}{1+3k^2},$$

进一步化简得

$$|AB|=\frac{2\sqrt{3}(1+\tan^2\alpha)}{1+3\tan^2\alpha}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3-2\cos^2\alpha}.$$

解二 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，如解一. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$时，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，F_1A，F_1B 均为焦半径. $|F_1A|=a+ex_1$，$|F_1B|=a+ex_2$，$|F_1A|+|F_1B|=2a+e(x_1+x_2)$，这里 $a=\sqrt{3}$，$e=\sqrt{\frac{2}{3}}$. 又由

$$\begin{cases} x^2+3y^2=3, \\ y=k(x+\sqrt{2}). \end{cases}$$

消去 y 得

$$(1+3k^2)x^2+6\sqrt{2}k^2x+6k^2-3=0.$$

根据韦达定理，得

$$x_1+x_2=-\frac{6\sqrt{2}k^2}{1+3k^2},$$

所以

$$\begin{aligned}|AB|&=2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{-6\sqrt{2}k^2}{1+3k^2}\\&=\frac{2\sqrt{3}(1+k^2)}{1+3k^2}\\&=\frac{2\sqrt{3}}{3-2\cos^2\alpha}.\end{aligned}$$

$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，上式仍成立.

解三 焦半径长的计算用极坐标较为方便. 以 F_1 为极点，射线 F_1F_2 为极轴，F_2 为椭圆 E 的另一焦点，建立极坐标系. 设椭圆 E 的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta},$$

$A(\rho_1,\theta)$，$B(\rho_2,\theta+\pi)$，于是

$$\begin{aligned}|AB|=\rho_1+\rho_2&=\frac{ep}{1-e\cos\theta}+\frac{ep}{1-e\cos(\theta+\pi)}\\&=\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}.\end{aligned}$$

这里 $a=\sqrt{3}, e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{2}{3}}$，可知 $c=1, ep=\frac{b^2}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，代入得

$$|AB|=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{2}{3}\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3-2\cos^2\theta}.$$

解四 如图 12-1，在椭圆中，点 A 确定，则 $\triangle F_1AF_2$ 确定，且 $\angle AF_1F_2=\alpha$. $|F_1F_2|=2c, |AF_1|+|AF_2|=2a$，故可解三角形得 $|AF_1|$. 事实上，设 $|AF_1|=x$，则 $|AF_2|=2a-x$，于是

$$x^2+(2c)^2-2x\cdot 2c\cdot\cos\alpha$$
$$=(2a-x)^2.$$

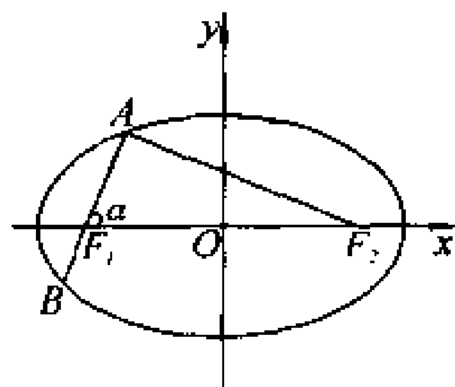


图 12-1

解得 $x=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}$，$x$ 即为 $|AF_1|$. 同理可得

$$|BF_1|=\frac{b^2}{a-c\cos(\alpha+\pi)}.$$

将 $|AF_1|$、$|BF_1|$ 相加，并将 $a=\sqrt{3}, c=\sqrt{2}, b=1$ 代入即得.

注 二次曲线上两点连线段，称之为该曲线的弦. 若弦所在直线过焦点，又称其为焦点弦. 上面介绍了求二次曲线焦点弦长的几种常用方法，其中第一种方法对一般二次曲线弦长计算也是适用的.

例 3 已知椭圆

$$(x-m)^2+3(y+m)^2=3 \quad (m\in\mathrm{R}), \qquad ①$$

(1) 求证：不论 m 为何实数，椭圆的中心总在同一直线 l 上；

(2) 平行于 l 的直线上，哪些与椭圆相交？

(3) 证明，任一条平行于 l 且与椭圆相交的直线在椭圆内截得的弦长与 m 无关；

(4) 不论 m 为何实数，试求一条被椭圆①截得的弦长都等于 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 的直线.

解 (1) ①可改写为

$$\frac{(x-m)^2}{3}+(y+m)^2=1,$$

所以椭圆的中心为 $(m,-m)$，不论 m 为何实数，椭圆的中心总在直线 $x+y=0$ 上.

(2) 设平行于 l 的直线方程为

$$y=-x+b,$$

代入①消去 y 得

$$4x^2-2(3b+4m)x+(3b^2+6bm+4m^2-3)=0. \quad ②$$

由②有

$$\begin{aligned}\Delta &=4(3b+4m)^2-16(3b^2+6bm+4m^2-3)\\ &=12(4-b^2).\end{aligned}$$

故当 $4-b^2>0$，即 $-2<b<2$ 时，平行于 l 的直线与椭圆相交.

(3) 设直线 l 与一椭圆相交于 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，则由②得

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{1}{2}(3b+4m),\\ x_1x_2=\frac{1}{4}(3b^2+6bm+4m^2-3),\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\ &=2(x_1-x_2)^2\\ &=2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]\\ &=\frac{1}{2}(12-3b^2), \quad ③\end{aligned}$$

直线在椭圆内截得的弦长等于 $\frac{1}{2}\sqrt{24-6b^2}$，与 m 无关.

(4) 显然，直线 l' 被椭圆截得的弦长相等，必须是 l' 与 l 平行（或重合）. 依题设和③，有

$$\frac{\sqrt{24-6b^2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

解得 $b=\pm 1$ 所求直线有两条为 $y=-x\pm 1$.

例 4 若抛物线 $y=ax^2-1$ 上存在关于直线 $x+y=0$ 成轴对称两个点,试求 a 的取值范围.

分析 抛物线 $y=ax^2-1$ 的顶点为$(0,-1)$,对称轴为 y 轴.存在关于直线 $x+y=0$ 对称两点的充要条件是存在一对点 $P(x_1,y_1)$, $P'(-y_1,-x_1)$,满足

$$\begin{cases} y_1=ax_1^2-1, & ① \\ -x_1=a(-y_1)^2-1. & ② \end{cases}$$

①-②得

$$x_1+y_1=a(x_1^2-y_1^2). \quad ③$$

因点 P 不在直线 $x+y=0$ 上,故由③可得

$$x_1=y_1+\frac{1}{a}, \quad ④$$

④代入②得

$$ay_1^2+y_1+\frac{1}{a}-1=0. \quad ⑤$$

由④,⑤可知 a 的取值取决于方程⑤是否存在实根,即须

$$\Delta=1-4a\left(\frac{1}{a}-1\right)>0.$$

解得 $a>\frac{3}{4}$,即为所求.

例 5 如图 12-2 设直线 $lx+my+n=0$ 与抛物线 $y^2=4ax(a>0)$相交于点 P、Q,F 为抛物线的焦点.直线 PF、QF 交抛物线于点 R、S.求直线 RS 的方程.

分析 常规思路是联立方程组

$$\begin{cases} lx+my+n=0, \\ y^2=4ax, \end{cases}$$

求出 P、Q 两点坐标,再求 PF、QF 两直线的方程,继而与抛物线方

程联立求 R、S 的坐标，最后得到直线 RS 的方程．实际上这难以进行．注意到图形呈对称性，一种较为合理的处理方式是“打破”P、Q、R、S 之间存在先后顺序的“框架”把 QS、PR 过 F 作为约束条件，一视同仁．设 P、Q 的坐标为 $(at_i^2, 2at_i)$，$i=(1,2)$，R、S 的坐标为 $(at'^2_i, 2at'_i)$，$(i=1,2)$，于是 t_1，t_2 是方程

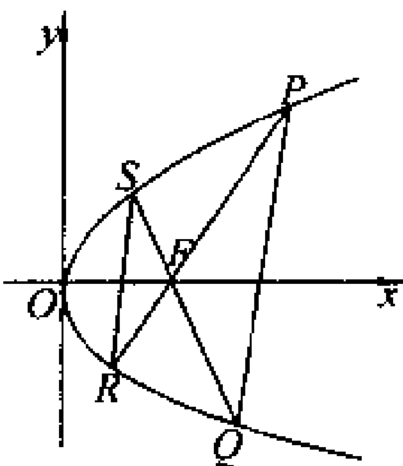


图 12-2

$$alt^2+2amt+n=0$$

的两根，根据韦达定理得

$$\begin{cases} t_1+t_2=-\dfrac{2m}{l}, & ① \\ t_1t_2=\dfrac{n}{al}. & ② \end{cases}$$

设直线 RS 的方程为 $Ax+By+C=0$，同理有

$$\begin{cases} t'_1+t'_2=-\dfrac{2B}{A}, & ③ \\ t'_1\cdot t'_2=\dfrac{C}{aA}. & ④ \end{cases}$$

因 PR 过焦点，故

$$\frac{2at_1}{at_1^2-a}=\frac{2at'_1}{at'^2_1-a},$$

即 $$t_1t'^2_1-t_1=t'_1t_1^2-t'_1,$$

化简得 $$t_1\cdot t'_1=-1. \quad ⑤$$

同理 $$t_2\cdot t'_2=-1. \quad ⑥$$

由①、②、③、④、⑤、⑥得 $-\dfrac{2B}{A}=\dfrac{2am}{n}$，$\dfrac{C}{aA}=\dfrac{al}{n}$．所以直线 RS 的方程为

$$x-\frac{am}{n}y+\frac{a^2l}{n}=0,$$

即
$$nx - amy + a^2 l = 0.$$

注 在不改变问题本质的前提下,从全局着眼,让"未知"与"已知"处于同等位置,灵活运用方程(组)思想,注意把握对称性,调整运算顺序,这些既是本例问题解决的成功之所在,在其他问题处理上也常可发挥重要作用.

例6 长为 $l(\geqslant 1)$的线段,它的两端点 P_1,P_2 在抛物线 $y=x^2$ 上运动,其中点为 M,求距 x 轴最近的点 M 的坐标.

分析一 如图 12-3,问题等价于求距抛物线准线最近的点 M. 而这启发我们利用抛物线定义探求解题途径. 设 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$M(x_3,y_3)$它们在准线 l 上的射影为 H_1、H_2、H,F 为焦点,则

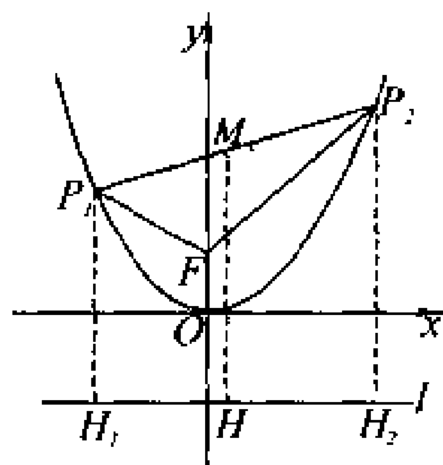


图 12-3

$$2|MH| = |P_1H_1| + |P_2H_2|$$
$$= |P_1F| + |P_2F| \geqslant |P_1P_2|,$$

即$|MH| \geqslant \frac{1}{2}$. 当且仅当 P_1、F、P_2 三点共线,也就是 P_1、P_2 为焦点弦时,$|MH| = \frac{l}{2}$. 此时点 M 距准线距离最近,有

$$y_{\min} = |MH| - \frac{1}{4} = \frac{2l-1}{4}.$$

直线 P_1P_2 过焦点,其方程为 $y = kx + \frac{1}{4}$,与 $y = x^2$ 联立,消去 y 得

$$x^2 - kx - \frac{1}{4} = 0, \quad ①$$

这里 $\Delta = k^2 + 1$,从而 $l = 1 + k^2$. 解得 $k = \pm\sqrt{l-1}$. 同时有 $x = \frac{k}{2} = \pm\frac{\sqrt{l-1}}{2}$. 故所求点 M 的坐标为$\left(\pm\frac{\sqrt{l-1}}{2}, \frac{2l-1}{4}\right)$.

分析二 设直线 P_1P_2 的方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + t\cos\alpha, \\ y = y_1 + t\sin\alpha. \end{cases}(t \text{ 为参数}, \alpha \text{ 为倾斜角})$$

于是
$$\begin{cases} x_2 = x_1 + l\cos\alpha, \\ y_2 = y_1 + l\sin\alpha. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_2 - x_1 = l\cos\alpha, \\ x_2^2 - x_1^2 = l\sin\alpha. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(\tan\alpha - l\cos\alpha), \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(\tan\alpha + l\cos\alpha). \end{cases}$$

所以

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\tan\alpha, \quad ②$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{4}(\tan^2\alpha + l^2\cos^2\alpha). \quad ③$$

由③得

$$y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\sec^2\alpha + l^2\cos^2\alpha) \geqslant \frac{1}{4}l^2,$$

从而 $y_{\min} = \dfrac{2l+1}{4}$. 此时 $l^2\cos^2\alpha = \sec^2\alpha, \tan\alpha = \pm\sqrt{l-1}$, 代入②得

$$x = \pm\sqrt{\frac{l-1}{2}}.$$

例 7　如图 12-4, 直线 $y = mx + b$(其中 $|m| < 1, |b| < 1$)与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 交于 P、Q 两点, 与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 交于 R、S 两点, 若点 P、Q 把线段 RS 三等分, 求 m, b 的值.

分析　直接计算 $|PQ|$ 好办, 直接计算 $|PR|$、$|QS|$ 就不那么容易了. 如何利用点 P、Q 把线段 RS 三等分? 两点距离公式等直接转化为某些数量关系, 但均不便于问题解决. 转换角度: 线段 PQ、RS 有相同中点, 这意味着可通过较简单计算获得重要关系式.

设 P、Q、R、S 的坐标分别为(x_i, y_i), $i=1,2,3,4$. 由

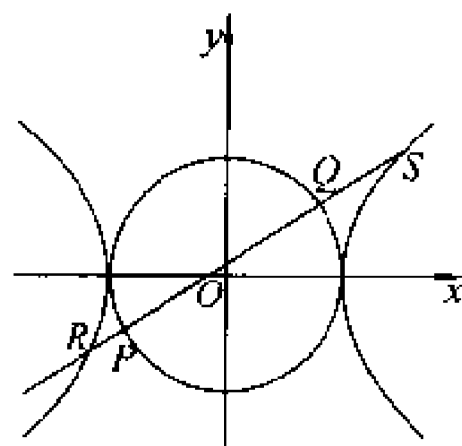


图 12-4

$$\begin{cases} y = mx + b, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

消去 y,得

$$(1+m^2)x^2 + 2mbx + b^2 - 1 = 0. \quad ①$$

根据韦达定理有

$$x_1 + x_2 = \frac{-2mb}{1+m}, \quad ②$$

由

$$\begin{cases} y = mx + b, \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

消去 y,得

$$(1-m^2)x^2 - 2mbx - (b^2+1) = 0. \quad ③$$

根据韦达定理有

$$x_3 + x_4 = \frac{2mb}{1-m}. \quad ④$$

由③,④得

$$\frac{-2mb}{1+m^2} = \frac{2mb}{1-m^2}.$$

解之,得 $m=0$ 或 $b=0$.

(i) 当 $m=0$ 时,①,③变为 $x^2+b^2-1=0$, $x^2-b^2-1=0$. 解之,得 $x_{1,2} = \pm\sqrt{1-b^2}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{1+b^2}$. 此时再考虑题设要求的其他方面. 由 $|PQ| = \frac{1}{3}|RS|$,得

$$|x_1 - x_2| = \frac{1}{3}|x_3 - x_4|,$$

从而

$$2\sqrt{1-b^2} = \frac{2}{3}\sqrt{1+b^2}.$$

解之,得 $b = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

经检验 $m=0, b=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$满足题设要求.

(ⅱ)若 $b=0$,仿上可求得 $m=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

注 数形结合,以形助数是大家熟知的一个根本性观点,但从本例可以看出,真正掌握这一点就应该做到不流于形式而能在深入发掘几何条件上下功夫,以便于从中筛选出利于计算的图形属性.

例 8 双曲线的中心在原点,焦点在 x 轴上,过双曲线右焦点且斜率为$\sqrt{\frac{3}{5}}$的直线交双曲线于 P、Q 两点.若 $OP\perp OQ$, $|PQ|=4$,求双曲线方程.

分析 设双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad ①$$

直线 PQ 的方程为

$$y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c), \qquad ②$$

其中 $c^2=a^2+b^2$.

由于 P、Q 为双曲线与直线 PQ 的交点,因此我们可以将直线 OP、OQ 的方程"合成"为

$$b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2\left(\frac{y-\sqrt{\frac{3}{5}}x}{-\sqrt{\frac{3}{5}}c}\right)^2=0.$$

整理得

$$\frac{3}{5}b^4x^2-\frac{3}{5}a^2\left(a^2+\frac{8}{3}b^2\right)y^2+2\sqrt{\frac{3}{5}}a^2b^2xy=0. \qquad ③$$

因 $OP\perp OQ$,故由③得

$$b^4-a^2\left(a^2+\frac{8}{3}b^2\right)=0,$$

即

$$(a^2+3b^2)(3a^2-b^2)=0,$$

所以 $$b^2=3a^2. \quad ④$$

由④知 $b=\sqrt{3}a$，进而有 $c=2a, e=2$. 可见斜率为$\sqrt{\frac{3}{5}}$的直线与双曲线的交点分别在双曲线左右两支上，如图 12-5.

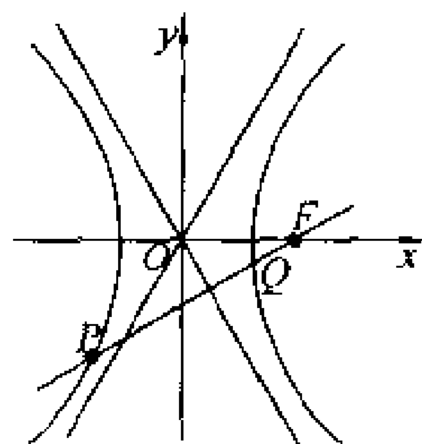


图 12-5

依题设，直线 PQ 过焦点，$|PQ|=4$，宜于利用极坐标计算. 以 F 为极点，Fx 为极轴建立极坐标系，设双曲线方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}(\text{允许 } \rho<0),$$

于是

$$\begin{aligned}|PQ|&=|FP|-|FQ|\\&=-\frac{ep}{1-e\cos\theta}-\frac{ep}{1+e\cos\theta}\\&=\frac{2ep}{e^2\cos^2\theta-1}=4, \quad ⑤\end{aligned}$$

这里 $ep=\frac{b^2}{a}, \cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\frac{3}{5}}=\frac{5}{8}$. 再代入⑤得

$$\frac{4b^2}{3a}=4. \quad ⑥$$

由④、⑥解得 $a^2=1, b^2=3$. 于是所求双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

练 习 十 二

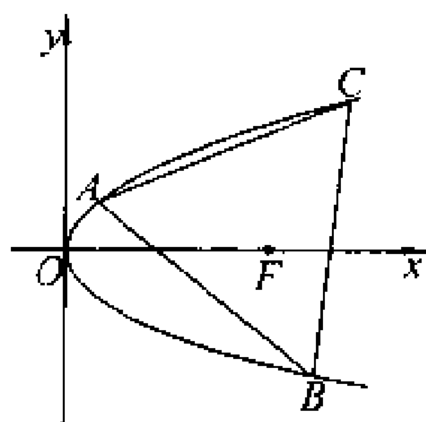
一、填空题

1. 直线 l 被双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 所截的线段 MN 恰被点 $A(3,-1)$ 平分，则直线 l 的方程是______.

2. 如图所示，$\triangle ABC$ 的三个顶点都在抛物线 $y^2=32x$ 上，点 $A(2,8)$，且$\triangle ABC$ 的重心与这条抛物线的焦点重合，则直线 BC 的斜

率是______.

3. 在抛物线 $y^2=2px+p^2$（$p>0$ 为常数）中，设有过原点互相垂直的两直线，分别交曲线于 A、B 和 C、D 两点，则 $|AB|$ 与 $|CD|$ 和的最小值是______.



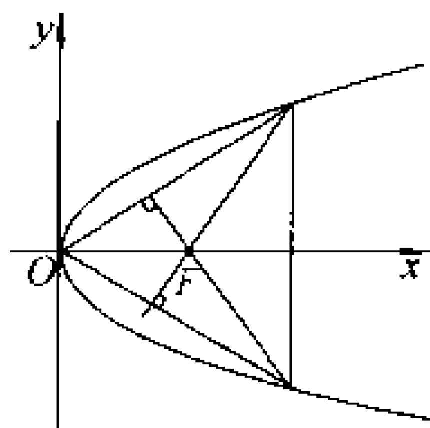
（第 2 题）

4. 以双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 左焦点 F，左准线 l 为相应的焦点、准线的椭圆截直线 $y=kx+3$ 所得的弦恰好的被 x 轴平分，则 k 的取值范围是______.

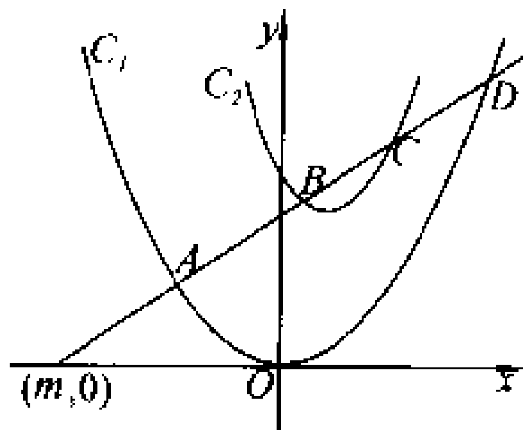
5. 过抛物线 $C_1:y=-x^2+1$ 和 $C_2:y=x^2-1$ 的左交点 A，作直线分别交 C_1，C_2 于点 P，Q，$|AP|\cdot|AQ|$ 取最大值时，直线 PQ 所在方程的倾斜角为______.

二、解答题

6. 如图所示，抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形的一个顶点在原点，三边上的高线都通过抛物线的焦点 F，求此三角形外接圆的方程.



（第 6 题）



（第 8 题）

7. 已知抛物线 $y^2=-x$ 与直线 $y=k(x+1)$ 相交于 A、B 两点.

（1）求证：$OA\perp OB$；

（2）当 $\triangle AOB$ 面积等于 $\sqrt{10}$ 时，求 k 的值.

8. 如图所示,已知抛物线 $C_1: y = x^2$, $C_2: y = 2x^2 - 3x + 3$. 倾斜角为 α 的直线和 C_1, C_2 相交,且四个交点在直线上由左到右的顺序为 A、B、C、D,求证: $|AB| - |CD|$ 为定值.

9. 点 A 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右顶点,过 A 作直线 l_1、l_2 分别与它的两条渐近线平行,又过原点作直线 l 分别交 l_1、l_2 于点 P、Q,交该曲线于点 R,求证: $|OP|$, $|OR|$, $|OQ|$ 成等比数列.

10. 一正方形 $ABCD$ 的 A、B 两顶点在抛物线 $y = x^2$ 上,C、D 两顶点在直线 $y = x - 4$ 上,求正方形的边长 d.

11. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的动点 P 引圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 的两条切线 PA、PB,A、B 为切点,直线 AB 与两轴交于 M、N 两点,O 为原点.求 $S_{\triangle MON}$ 的最小值.

12. 已知抛物线 C 的准线为 $x = \frac{3}{4}$,直线 $y = x - 1$ 与抛物线交于 A、B 两点,且 $|AB| = 3\sqrt{2}$,线段 AB 的中点与抛物线顶点连线的斜率为 $\frac{1}{5}$,求此抛物线方程.

第十三讲　复数的基本概念及运算

知识点和方法述要

1. 复数的基本形式

(1) 代数形式：$z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，其中 x 可记作 $Re(z)$，y 可记作 $Im(z)$，$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

(2) 三角形式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r\geqslant 0,\theta\in\mathbf{R})$

(3) 指数形式：$z=re^{i\theta}(r\geqslant 0,\theta\in\mathbf{R})$.

(4) 复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$由一有序实数对(a,b)惟一确定.复数集 C 与复平面内所有点所成的集合一一对应. z 可用点 $Z(a,b)$表示.向量 $\overrightarrow{OZ}$ 与 z 一一对应.

2. (1) 两个复数相等的充要条件是它们的实部、虚部对应相等，或者它们的模与辐角主值相等(辐角相差 2π 的整数倍).

利用复数相等的充要条件是我们处理很多复数问题的关键所在.通过"一分为二"，使复数问题化归为实数问题得以解决.

(2) 两个不全是实数的复数不能比较大小.

3. 复数的运算法则

(1) (ⅰ) 复数的加法则：设 $z_1=a+bi,z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R}$，以下同).规定 $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$.

(ⅱ) 复数的加法满足交换律、结合律.

(ⅲ) 复数的加法可以按照向量的加法法则进行：$\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$对应着以$\overrightarrow{OZ_1}$、$\overrightarrow{OZ_2}$为邻边的平行四边形的一条对角线 $\overrightarrow{OZ}$.

(2) 复数的减法规定为加法的逆运算.

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

(3) 复数的乘法法则：

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

(4) 复数的除法规定为乘法的逆运算

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i(c+di\neq 0).$$

4. 合理计算是复数运算中一个需要引起重视的问题.

(1) 虚数单位 i 的整数次幂具有“周期性”.

(2) 1 的立方根为 $1,\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\overline{\omega}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.\ \omega,\overline{\omega}$ 具有如下性质:

(ⅰ) $\omega^3=\overline{\omega}^3=1$;

(ⅱ) $1+\omega+\omega^2=0$;

(ⅲ) $1+\overline{\omega}+\overline{\omega}^2=0$;

(ⅳ) $\omega\cdot\overline{\omega}=1$;

(ⅴ) $\omega^2=\overline{\omega},\quad \omega^2=\omega$;

(3) 熟练掌握 $(1\pm i)^2=\pm 2i,(3\pm 4i)^2=-7\pm 24i$ 等有助于计算.

5. 对于复数 $z=a+bi(a,b\in\mathrm{R}),\overline{z}=a-bi$ 称为它的共轭复数.共轭复数 $z,\overline{z}$ 具有以下基本性质:

(ⅰ) $z\cdot\overline{z}=|z|^2$;

(ⅱ) $z+\overline{z}=2Re(z)$;

(ⅲ) $z-\overline{z}=2Im(z)$;

(ⅳ) $\overline{\overline{z}}=z$;

(ⅴ) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$;

(ⅵ) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

(ⅶ) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

(ⅷ) z 是实数的充要条件是 $\overline{z}=z$;z 是纯虚数的充要条件是 $\overline{z}=-z(z\neq 0)$.

(ⅸ) 设 $f(x)$ 是变量 x 的实系数多项式,即 $f(x)=a_0+a_1x+$

$a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.其中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均是实数则对任意复数 z,有 $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$.

6. 设点 Z_1,Z_2 分别对应复数 z_1,z_2,则两点间的距离 $d=|Z_1Z_2|=|z_1-z_2|$.

7. 几种常见的曲线的复数方程:

(1) 圆:$|z-z_0|=r(r>0,z_0$ 是常数).

(2) 线段 Z_1Z_2 的中垂线:$|z-z_1|=|z-z_2|$(其中 z_1,z_2 分别是点 Z_1,Z_2 对应的复数.以下同).

(3) 椭圆:$|z-z_1|+|z-z_2|=2a(a>0$ 且 $|z_1-z_2|<2a)$.

(4) 双曲线:$|z-z_1|-|z-z_2|=2a(a>0$ 且 $|z_1-z_2|>2a)$.

(5) 抛物线:$|z-\frac{p}{2}|=Re(z)+\frac{p}{2}(p>0)$.

(6) 过点 Z_1,Z_2 的直线:$z-z_1=\gamma(z-z_2)(\gamma\in\mathbf{R}$,不包括点 $z_2)$

8. 关于复数 x 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,

(1) $\Delta=b^2-4ac>0$,方程有两不等实根:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(2) $\Delta=b^2-4ac=0$,方程有两相等实根:

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}.$$

(3) $\Delta=b^2-4ac<0$,方程有一对共轭虚根.

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}i.$$

例 题 精 讲

例 1 已知复数

$$z=\cos\alpha+i\sin\alpha,\mu=\cos\beta+i\sin\beta$$

且 $z+\mu=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$,求 $\tan(\alpha+\beta)$.

解 依题设，有

$$z+\mu=(\cos\alpha+i\sin\alpha)+(\cos\beta+i\sin\beta)$$
$$=(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)$$
$$=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$$

根据复数相等的充要条件，知

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{4}{5}, & ①\\ \sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{3}{5}. & ②\end{cases}$$

由①得 $$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{4}{5}, \qquad ③$$

由②得 $$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3}{5}, \qquad ④$$

④÷③得 $$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4},$$

所以 $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}.$$

例 2 计算.

$$i^{1992}+(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^8-(\frac{\sqrt{2}}{1-i})^{50}+\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}i}$$
$$+\frac{(4-8i)^2-(-4+8i)^2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}.$$

解 $$\text{原式}=(i^4)^{498}+16(1+i)^8-[\frac{2}{(1-i)^2}]^{25}+$$
$$\frac{i(1+2\sqrt{3}i)}{1+2\sqrt{3}i}+\frac{(4-8i)^2-(-4+8i)^2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}$$
$$=1+16(2i)^4-(\frac{2}{-2i})^{25}+i+0$$
$$=1+256-i+i$$

$$= 257.$$

例 3 证明:有两个数,其中每一个都是两个整数的平方和,则它们的积仍是两个整数的平方和.

分析 设 $m = a^2 + b^2, n = c^2 + d^2 (a, b, c, d \in \mathbf{Z})$,则可以将它们分解为

$$m = (a + bi)(a - bi),$$

$$n = (a + di)(c - di).$$

所以
$$\begin{aligned} mn &= (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di) \\ &= [(a + bi)(c + di)][(a - bi)(c - di)] \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)i] \cdot [(ac - bd) - (ad + bc)i] \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \end{aligned}$$

这里 $ac - bd, ad + bc$ 都是整数,故命题成立.

例 4 设 ω, λ 为复常数,$|\lambda| \neq 1$,解关于 z 的方程

$$\bar{z} - \lambda z = \omega. \qquad ①$$

解 将原方程①两边取共轭,得

$$\overline{\bar{z} - \lambda z} = \bar{\omega},$$

即
$$z - \overline{\lambda z} = \bar{\omega}, \qquad ②$$

将②两边同乘 λ,得

$$\lambda z - |\lambda|^2 \bar{z} = \lambda \bar{\omega}. \qquad ③$$

① + ③ 得
$$\bar{z}(1 - |\lambda|^2) = \omega + \lambda \bar{\omega}. \qquad ④$$

将④两边取共轭得

$$z(1 - |\lambda|^2) = \bar{\omega} + \bar{\lambda}\omega \qquad ⑤$$

因 $|\lambda| \neq 1$,所以 $z = \dfrac{\bar{\lambda}\omega + \bar{\omega}}{1 - |\lambda|^2}$.

例 5 已知关于 x 的二次方程

$$a(1 + i)x^2 + (1 + a^2 i)x + a^2 + i = 0 \qquad ①$$

有实根,试确定实数 a 的值.

分析 方程①的系数是虚数,不适宜使用判别式.先从方程实根存在必要条件出发,逐步缩小 a 的可能取值的范围.

设①有一实根 x_o，于是

$$a(1+i)x_o^2+(1+a^2i)x_o+a^2+i=0,$$

即

$$(ax_o^2+x_o+a^2)+i(ax_o^2+a^2x_o+1)=0. \quad ②$$

根据复数相等的充要条件是两复数的实部和虚部分别相等，由②得

$$\begin{cases} ax_o^2+x_o+a^2=0, & ③ \\ ax_o^2+a^2x_o+1=0. & ④ \end{cases}$$

④－③得 $$(x_o-1)(a^2-1)=0.$$

解得 $x_o=1$ 或 $a=\pm 1$.

还须验证. 将 $x_o=1$ 代入③得

$$a^2+a+1=0. \quad ⑤$$

对于⑤，因 $a\in\mathbf{R}$，有

$$a^2+a+1=(a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0,$$

所以⑤不成立. $x_o=1$ 应排除.

同理，$a\neq 1$.

当 $a=-1$ 时，③，④均为

$$x_o^2-x_o-1=0,$$

可解得 $x_o=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

综上所述，$a=-1$.

例 6 设复数 α、β、γ 满足 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$，证明

$$\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$$

是实数.

分析 记

$$p=\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}.$$

欲证命题成立，只须证得 $\overline{p}=p$. 由于 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$，所以 $\overline{\alpha}\alpha=\overline{\beta}\beta=\overline{\gamma}\gamma=1$ 即 $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$，$\overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$，$\overline{\gamma}=\dfrac{1}{\gamma}$，于是

$$\overline{p}=\overline{\left(\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}\right)}$$

$$=\frac{\overline{(\alpha+\beta)}\cdot\overline{(\beta+\gamma)}\cdot\overline{(\gamma+\alpha)}}{\overline{\alpha\beta\gamma}}$$

$$=\frac{\overline{(\alpha+\beta)}\cdot\overline{(\beta+\gamma)}\cdot\overline{(\gamma+\alpha)}}{\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\cdot\overline{\gamma}}$$

$$=\frac{(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\cdot(\overline{\beta}+\overline{\gamma})\cdot(\overline{\gamma}+\overline{\alpha})}{\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\cdot\overline{\gamma}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}}$$

$$=\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\cdot\alpha\beta\gamma$$

$$=p.$$

例 7 已知复数 $z=t+(3+3\sqrt{3}i)$,其中 t 是使$\frac{t+3}{t-3}$为纯虚数时的复数,求 z 在平面上对应点 P 的轨迹.

分析 $\frac{t+3}{t-3}$是纯虚数的充要条件是

$$\frac{t+3}{t-3}=-\overline{\left(\frac{t+3}{t-3}\right)},\qquad ①$$

且
$$\frac{t+3}{t-3}\neq 0.\qquad ②$$

由 ① 知
$$\frac{t+3}{t-3}+\frac{\overline{t}+3}{\overline{t}-3}=0$$

即
$$\frac{(t+3)(\overline{t}-3)+(\overline{t}+3)(t-3)}{(t-3)(\overline{t}-3)}=0.\qquad ③$$

由③可得 $|t|=3(t\neq 3)$,又由②知 $t\neq -3$,所以

$$|t|=3\quad(t\neq\pm 3).\qquad ④$$

依题设得
$$t=z-(3+3\sqrt{3}i),$$

代入④得
$$|z-(3+3\sqrt{3}i)|=3,$$

且 $z\neq 6+3\sqrt{3}i, 3\sqrt{3}i$，所以 P 的轨迹是以 $(3,3\sqrt{3})$ 为圆心，半径为 3 的圆除去复数 $6+3\sqrt{3}i, 3\sqrt{3}i$ 对应两点.

也可以如下推导 $|t|=3(t\neq\pm 3)$.

设 $\frac{t+3}{t-3}=ai(a\in\mathbf{R}, a\neq 0)$，则

$$t=\frac{-3(1+ia)}{1-ia},$$

取模取得 $|t|=3(t\neq\pm 3)$.

例 8 设 $p\in\mathbf{R}$，方程 $x^2-2x+2=0$ 的两复根的对应点为 A、B，方程 $x^2+2px-1=0$ 的两复根的对应点为 C、D. 若 A、B、C、D 四点共圆，求实数 p 的值.

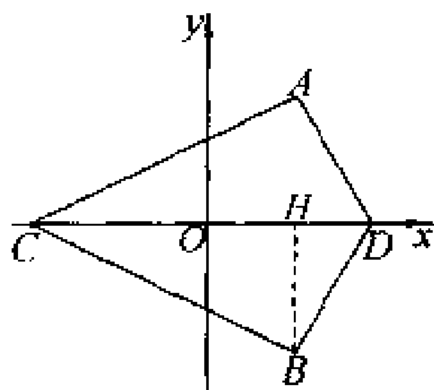


图 13-1

分析 如图 13-1，用 A、B、C、D 同时表示点对应的复数. 方程 $x^2-2x+2=0$ 的两根为 $A=1+i, B=1-i$，又方程

$$x^2+2px-1=0 \quad ①$$

有两实根 C、D. 设 B 在 x 轴上射影为 H. 因 A、B、C、D 四点共圆，则

$$|CH|\cdot|HD|=|HB|^2,$$

即

$$(1-C)(D-1)=1.$$

从而

$$C+D=2+C\cdot D. \quad ②$$

由 ① 知

$$C+D=-2p, C\cdot D=-1,$$

代入 ② 得

$$-2p=1,$$

所以

$$p=-\frac{1}{2}.$$

例 9 设由满足下列两个条件的模为 1 的 n 个复数组成一个集合 S：

（i）1 是 S 的元素；

(ii) 若 z,w 是 S 的元素，则 $z-2w\cos\theta$ 也是 S 的元素，其中 θ 是 $\frac{z}{w}$ 的辐角.

如果 $n\leqslant 4$，试求此集合 S.

分析 设 $z,w\in S$，并用复数对应的大写字母表示点. 考察在复平面上 $z'=z-2w\cos\theta$ 与 z,w 之间的关系. 如图 13-2，自 Z 至 OW 作垂线，垂足为 C，则 $c=w\cos\theta$，有

$$z'=z-2w\cos\theta=z-2c.$$

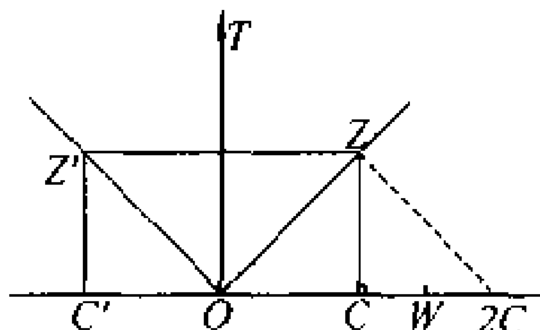


图 13-2

点 Z' 与 Z 关于直线 OW 的垂线 OT 对称，Z' 也属于 S.

其次，在 $w=z$ 时，有 $\cos\theta=1$，故

$$z'=z-2z\cos\theta=-z.$$

可见，若 z 是 S 的一个元素，那么 $-z$ 也是 S 的一个元素.

因 $z\neq 0$，故 $z\neq -z$，集合 S 中的元素一定是偶数个.

由(i)知，$1\in S$，所以 $-1\in S$. 这样一来，$n=2$ 时，$S=\{-1,1\}$.

易见 $n=4$ 时，$S=\{-1,1,-i,i\}$.

练 习 十 三

一、填空题

1. $\dfrac{(2+2i)^7}{(-1+\sqrt{3}i)^3}$ 的值是______.

2. 已知 $z=-\dfrac{2}{1+\sqrt{3}i}$，则 $1+z+z^2+\cdots+z^{1992}$ 的值为______.

3. 方程组 $\begin{cases}|z-3|+|z+3|=10\\|z-5i|-|z+5i|=8\end{cases}$ 的解是______.

4. 方程 $2|z+i-3|^2=2(z+i)^2-1$ 的解是______.

5. α,β 是方程 $x^2+2px+1=0$ 的两个虚根，在复平面上 $\alpha,\beta,1$

对应的点构成正三角形,则实数 p 的值为______.

6. 已知 $f(x)=6x^3-19x^2+21x-11$,且 $x_1=\frac{3+\sqrt{7}i}{4}$,则 $f(x_1)$的值为______.

7. 设一元二次方程 $ax^2+x+1=0(a\neq0, a\in R)$,在复数集上的根是 β.若 $|\beta+1|=1$,则 a 的取值范围是______.

8. 设复数 z 满足 $|z|=1$,且 $z^2+z<0$,则 $z=$______.

9. 已知 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,则满足 $1+\omega^{2k}+(\omega+1)^{2k}=0$ 的不超过 100 的正整数 k 的个数为______.

10. 已知 $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}a+(a+1)i$, $z_2=-3\sqrt{3}b+(b+2)i$, $a,b\in R^+$,且 $3z_1^2+z_2^2=0$, $\overline{z_1 z_2}$的值为______.

二、解答题

11. 求同时满足下列两个条件的所有复数 z:

(ⅰ) $1<z+\frac{10}{z}\leqslant6$;

(ⅱ) z 的实部、虚部都是整数.

12. 求证二次方程 $(1-i)x^2+(\lambda+i)x+(1+\lambda i)=0(\lambda\in R)$有两个虚根的充要条件是 $\lambda\neq2$.

13. 已知复数 z_1,z_2,满足 $|z_1|=|z_2|=1$,且 $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,求 z_1,z_2 的值.

14. 设集合 $M=\{\alpha,\beta,\gamma\}$,其中 $\alpha,\beta,\gamma\in C$.若 M 中任意两数之积及任意一个数的平方仍是 M 中的元素,求集合 M.

15. 设 $z=\sum_{k=1}^{n}z_k^2$, $z_k=x_k+y_ki(k=1,2,\cdots n)$, $x_k,y_k\in R$, p 是 z 的平方根的实部,求证:$|p|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|x_k|$.

第十四讲　复数的三角形式的运算

知识点和方法述要

1. 复数的乘法与乘方：设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

（ⅰ）几何意义：复数的乘法在复平面上对应着向量的旋转和向量模的伸缩.

（ⅱ）棣莫佛定理：$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)(n\in Z)$，

（ⅲ）$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)](z_2\neq0)$.

（ⅳ）一般地，$\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2$，$\arg(\frac{z_1}{z_2})=\arg z_1-\arg z_2$ $(z_2\neq0)$，但通常 $\arg(z_1z_2)\neq\arg z_1+\arg z_2$.

2. 复数的开方：设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则 z 的$\sqrt[n]{r}$次方根 $\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})(k=0,1\cdots,n-1)$.

几何意义：复数 z 的 n 个 n 次方根对应着的向量的终点均匀地分布在以原点为圆心，$\sqrt[n]{r}$为半径的圆上，即相邻两向量夹角为$\frac{2\pi}{n}$.

3. 二项方程 $a_nx^n+a_0=0(a_n\neq0,a_n,a_0\in C)$. 令 $z_0=-\frac{a_0}{a_n}$，x 即为 z_0 的 n 次方根. 设 $z_0=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，于是，$x=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})(k=0,1\cdots n-1)$.

4. 1 的每一个 $n(n\in N)$次方根，称之为 n 次单位根或简称单位根. 记这 n 个单位根为 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$，则 $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$，($k$

$=0,1,n-1$). 于是,全部 n 次单位根可表示为 $1,\varepsilon_1,\varepsilon_1^2,\cdots,\varepsilon_1^{n-1}$. 当 n 为奇数时,除 1 外其余的 n 次单位根都不是实数;当 n 为偶数时 -1 也是一个 n 次单位根.

n 次单位根有以下基本性质:

(i) 两个 n 次单位根 $\varepsilon_j,\varepsilon_k$ 的乘积仍是一个 n 次单位根,且 $\varepsilon_j\cdot\varepsilon_k=\varepsilon_{j+k}$,这里 j,k 是任意整数.

(ii) 对于任意整数 m,有 $\varepsilon_k^m=\varepsilon_{mk}$.

(iii) 对于任意整数 k,若 $k=nq+r,q\in\mathrm{Z},0\leqslant r\leqslant n-1$,有 $\varepsilon_k=\varepsilon_r$.

(iv) 对于任意整数 m,当 $n\geqslant 2$ 时,有

$$1+\varepsilon_1^m+\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=\begin{cases}n, & \text{当 } n\mid m;\\ 0, & \text{当 } n\nmid m.\end{cases}$$

特别地,当 $m=1$ 时,有

$$1+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n-1}=0.$$

(v) $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1})=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_1^2)\cdots(x-\varepsilon_1^{n-1})$.

例 题 精 讲

例 1 设 $n\leqslant 1985,n\in\mathrm{N}$,且存在 θ 满足

$$(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\sin n\theta+i\cos n\theta,$$

那么这种 n 的总个数是多少?

分析 假若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,那么

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)(n\in\mathrm{N}).$$

这是棣莫佛定理,运用棣莫佛定理的前提则是把复数 z 变化为它的三角形式. 现

$$\begin{aligned}&(\sin\theta+i\cos\theta)^n\\ =&\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]^n\end{aligned}$$

$$= \cos\left(\frac{n\pi}{2} - n\theta\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2} - n\theta\right), \quad ①$$

而且 $\quad \sin n\theta + i\cos n\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right). \quad ②$

两复数相等须模相等,辐角相差 2π 的整数倍,故由①,②可得

$$\frac{n\pi}{2} - n\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - n\theta \quad (k \in \mathrm{Z}),$$

解得 $\qquad n = 4k + 1 \quad (k \in \mathrm{Z}).$

因 $1 \leqslant n \leqslant 1985$,所以 $a \leqslant k \leqslant 496$. 满足题设要求的 n 的总个数是 497.

例 2 化简:$\dfrac{(\cos\theta - i\sin\theta)^8(1 + i\tan\theta)^5}{(\cos\theta + i\sin\theta)^2(\tan\theta + i)}$.

解 因为

$$1 + i\tan\theta = \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$\tan\theta + i = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + i = \frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta + i\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right].$$

$$\text{所以原式} = \frac{[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^8 \cdot \frac{1}{\cos^5\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)^5}{(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \cdot \frac{1}{\cos\theta}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{\cos^4\theta}\left[\cos\left(-4\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-4\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\cos^4\theta}(-\sin4\theta - i\cos4\theta)$$

$$= -\frac{1}{\cos^4\theta}(\sin4\theta + i\cos4\theta).$$

例 3 复数 $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta\left(0 < \theta < \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$, $z_2 = z_1 i + 1$, z_1, z_2 分别对应点 A、B. 设 $\angle AOB = \alpha$(O 为原点,$0 < \alpha < \pi$),求 α 的大

小.

分析 因 $0<\theta<\pi,\theta\neq\frac{\pi}{2}$,根据 A 点所在位置分为两种情况.

(ⅰ) 如图 14-1,A 在第Ⅰ象限,即 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$. $z_1 i$ 表示将向量 $\overrightarrow{OA'}$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后所得向量 $\overrightarrow{OA}$,再按平行四边形法则作 $z_2=z_1 i+1$ 对应向量 $\overrightarrow{OB}$,注意到 $\triangle A'BO$ 为等腰三角形,于是

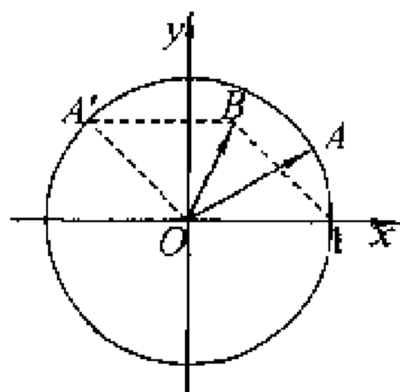


图 14-1

$$\alpha=\angle AOB=\frac{1}{2}(\theta+\frac{\pi}{2})-\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}.$$

(ⅱ) 如图 14-2,A 在Ⅱ象限,即 $\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,此时 $\angle A'OB=\frac{1}{2}[\frac{\pi}{2}-(\pi+\theta)]=\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}$

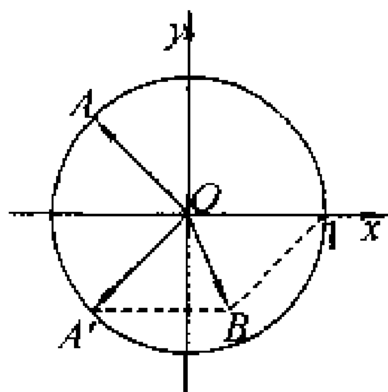


图 14-2

从而 $\alpha=\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\theta+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\theta.$

注 (ⅰ) 在例 3 解答中易犯的错误是遗漏第二种情形.

(ⅱ) 数形结合是处理涉及辐角主值问题一种有效手段.

例 4 设复数 z 满足 $\frac{z+1}{z+2}$ 的一个辐角的绝对值 $\frac{\pi}{6}$,试求复数 z 的辐角主值取值范围.

解 如图 14-3,设 $-2,-1$ 对应的点是 A、B,根据复数除法的几何意义,有 $\angle AZB=\frac{\pi}{6}$. 点 Z 的轨迹的两段弓形弧(除去端点),它们的圆心分别设为 O_1、O_2,所对应的复数为 $-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,显

然 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$. 所求复数的辐角主值的取值范围为$(\frac{5\pi}{6}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3},\pi)\cup(\pi,\frac{\pi}{6}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3})$.

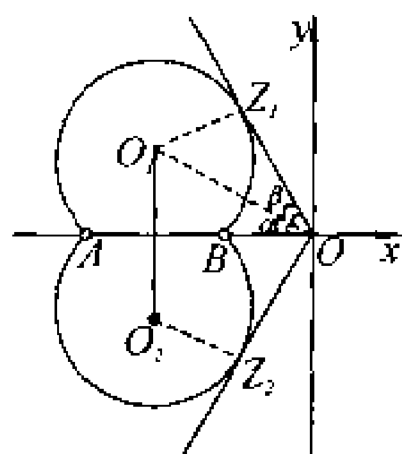


图 14-3

例 5 复平面上点 A、B 对应的复数分别为 $z_1=2$，$z_2=-3$，点 P 对应的复数 z，$\frac{z-z_1}{z-z_2}$ 的辐角主值为 φ，当点 P 在以原点为圆心，1 为半径的上半圆周(不包括两个端点)上运动时，求 φ 的最小值.

解 设 $z=x+yi(x,y\in R)$则 $x^2+y^2=1(y>0)$. 记 $\arg(z-z_1)=\alpha$，$\arg(z-z_2)=\beta$，则

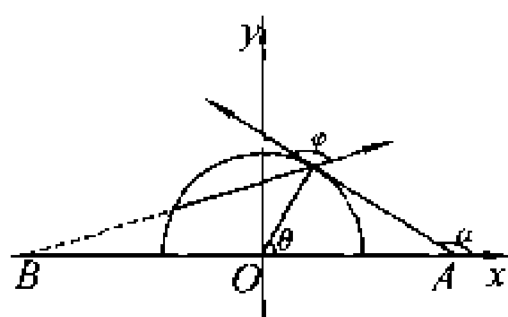


图 14-4

$\varphi=\alpha-\beta$，且$\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$(如图 14-4)，因为 $\tan\alpha=\frac{y}{x-2}$，$\tan\beta=\frac{y}{x+3}$，所以

$$\tan\varphi=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5y}{x-5}.$$

根据①，可设 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$\theta\in(0,\pi)$，则

$$\tan\varphi=\frac{5\sin\theta}{\cos\theta-5},$$

即
$$5\sin\theta-\tan\varphi\cdot\cos\theta=-5\tan\varphi. \quad ②$$

方程②在 $\theta\in(0,\pi)$内有实数解的充要条件是

$$\left|\frac{-5\tan\varphi}{\sqrt{5^2+\tan^2\varphi}}\right|\leqslant 1,$$

解得
$$-\frac{5\sqrt{6}}{12}\leqslant\tan\varphi\leqslant\frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

所以 $\varphi_{min} = \pi - \arctan\frac{5\sqrt{6}}{12}$,此时 P 的坐标为$(\frac{1}{5},\frac{2\sqrt{6}}{5})$.

例 6 复平面上 A 点对应复数 -2,动点 B 在以原点为圆心,1 为半径的圆上运动,以 AB 为边作正$\triangle ABC$(A,B,C 按逆时针方向排列),求动点 C 的轨迹.

分析 如图 14-5 同时用表示点的字母代表相应复数,依题设,有

$$|B| = 1, \quad ①$$

且 $(C - A)[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]$

$$= B - A. \quad ②$$

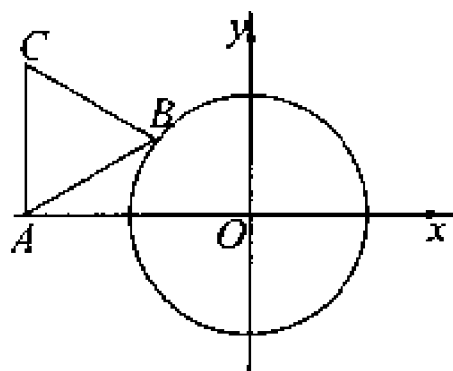


图 14-5

由 ② 可得

$$B = (C - A)[\cos(-\frac{\pi}{3}) + \sin(-\frac{\pi}{3})] + A. \quad ③$$

将 ③ 两边取模,可得

$$|(C - A)[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})] + A| = 1,$$

即

$$|\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})|\cdot|C - A + A(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})| = 1,$$

所以 $$|C - A + A(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})| = 1. \quad ④$$

将 $A = -2$ 代入 ④ 即得

$$|C - (-1 + \sqrt{3}i)| = 1. \quad ⑤$$

⑤说明 C 点的轨迹是以点$(-1,\sqrt{3}i)$为圆心、1 为半径的圆.

例 7 n 个复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 成等比数列,其中$|z_1|\neq 1$,公比为 q,$|q| = 1$,且 $q \neq \pm 1$.复数 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$,满足条件:$\omega_k = z_k + \frac{1}{z_k} + h$,其中 $k = 1, \cdots, n$,h 为已知实数,求证:复平面内表示 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 的点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 都在一个焦距为 4 的椭圆上.

分析 运算涉及乘方,宜用三角形式.设 $z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,$q$

$=\cos\theta+i\sin\theta$,其中 $r>0, r\neq 1, \theta\neq k\pi$,则

$$z_k=z_1q^{k-1}=r[\cos(\alpha+(k-1)\theta)+i\sin(\alpha+(k-1)\theta)],$$

从而 $$\omega_k-h=z_k+\frac{1}{z_k}$$

$$=(r+\frac{1}{r})\cos[\alpha+(k-1)\theta]$$

$$+i(r-\frac{1}{r})\cdot\sin[\alpha+(k-1)\theta]. \quad ①$$

令 $\omega_k=x+yi(x,y\in\mathrm{R})$,由①得

$$\begin{cases}x-h=(r+\frac{1}{r})\cos[\alpha+(k-1)\theta], & ②\\ y=(r-\frac{1}{r})\sin[\alpha+(k-1)\theta]. & ③\end{cases}$$

由②,③消去 α,θ,可得

$$\frac{(x-h)^2}{(r+\frac{1}{r})^2}+\frac{y^2}{(r-\frac{1}{r})^2}=1.$$

这说明 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$都在同一个椭圆上,其焦距为

$$2\sqrt{(r+\frac{1}{r})^2-(r-\frac{1}{r})^2}=4.$$

例 8 已知 $$\sin A+\sin 3A+\sin 5A=a,$$
$$\cos A+\cos 3A+\cos 5A=b,$$

求证:(1) 当 $b\neq 0$ 时,$\tan 3A=\frac{a}{b}$;

(2) $(1+2\cos 2A)^2=a^2+b^2$.

证明 (1) 令 $z=\cos A+i\sin A$,则 $z\cdot\bar{z}=1$,有

$$(\cos A+\cos 3A+\cos 5A)+i(\sin A+\sin 3A+\sin 5A)$$
$$=(\cos A+i\sin A)+(\cos 3A+i\sin 3A)+(\cos 5A+i\sin 5A)$$
$$=(\cos A+i\sin A)+(\cos A+i\sin A)^3+(\cos A+i\sin A)^5$$
$$=z+z^3+z^5=z^3(z^{-2}+1+z^2)$$
$$=z^3[1+2Re(z^2)]$$
$$=(1+2\cos 2A)(\cos 3A+i\sin 3A).$$

依题设,得

$$b + ai = (1 + 2\cos 2A)\cdot(\cos 3A + i\sin 3A), \qquad ①$$

及 $b \neq 0$,所以 $\tan 3A = \frac{a}{b}$.

(2) 由(1)知复数 $b + ai$ 的模为

$$r = |1 + 2\cos 2A| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

故
$$(1 + 2\cos 2A)^2 = a^2 + b^2.$$

注 为三角方面的计算另辟蹊径是复数三角形式的一大用途.

例 9 设 $0 < x < 1$,求

$$2\arctan\frac{1+x}{1-x} + \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

的值.

分析 因 $0 < x < 1$,故 $\arctan\frac{1+x}{1-x}, \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2\arctan\frac{1+x}{1-x} + \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} \in (0, \frac{3}{2}\pi)$, $\arctan\frac{1+x}{1-x}$, $\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$分别是复数$(1-x)+(1+x)i$,与 $2x+(1-x^2)i$ 的辐角主值. 进一步, $2\arctan\frac{1+x}{1-x}$是复数$[(1-x)+(1+x)i]^2$ 即 $-4x+2(1-x^2)i$ 的辐角主值.

$$[-4x + 2(1 - x^2)i]\cdot[2x + (1 - x^2)i] = -2(1 + x^2)^2 < 0.$$

根据复数乘法的几何意义,所得乘积的辐角主值为 π,即为所求.

例 10 设 $z_k(k = 0, 1, \cdots, n-1)$是 $z^n - 1$ 的 n 个根

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其中 m 为小于 n 的正整数,求证:$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) = a_0$

证明 依题设,有

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = z_1^k (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

且
$$f(z_0) = a_m + a_{m-1} + \cdots + a_l + \cdots + a_1 + a_0,$$

$$f(z_1) = a_m z_1^m + a_{m-1} z_1^{m-1} + \cdots + a_l z_1{}^l + \cdots + a_1 z_1 + a_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(z_{n-1}) = a_m z_1^{(n-1)m} + a_{m-1} z_1^{(n-1)(m-1)} + \cdots + a_l z_1^{(n-1)l} + \cdots + a_1 z_1^{n-1} + a_0$$

其中 $1 \leqslant l < n, z_1^l \neq 1$. 因

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_1^{kl} = \frac{1-(z_1^l)^n}{1-z_1^l} = \frac{1-(z_1^n)^l}{1-z_1^l} = 0,$$

故
$$\begin{aligned} & f(z_0) + f(z_1) + \cdots + f(z_{n-1}) \\ &= \sum_{l=0}^{m} a_l + \sum_{l=0}^{m} a_l z_1^l + \cdots + \sum_{l=0}^{m} z_1^{(n-1)} \cdot a_l \\ &= a_m \sum_{k=0}^{n-1} z_1^{km} + a_{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} z_1^{k(m-1)} + \cdots + a_1 \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k + n a_0 \\ &= n a_0. \end{aligned}$$

即得
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) = a_0.$$

练 习 十 四

一、填空题

1. 已知$\left|\frac{z-1}{z}\right| = \frac{1}{2}$, $\arg \frac{z-1}{z} = \frac{\pi}{3}$,则 $\bar{z}$ 的辐角主值为______.

2. 如果 $z = 2\cos\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{3}{4}\pi + i + i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$,则 $z^{12} =$______.

3. 已知 $\arg(z+1) = \frac{\pi}{6}$, $\arg(z-1) = \frac{2\pi}{3}$,复数 z 为______.

4. 已知等比数列$\{z_n\}$中,$z_1 = 1, z_2 = a + bi, z_3 = b + ai$ ($a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$),若 n 为满足 $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$ 的最小值,则 $z_1 z_2 \cdots z_n$ 的值为______.

5. 满足$(\sqrt{3} - i)^m = (1 + i)^n$ 的最小自然数 m, n 的积为______.

6. $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{8}$的值为______.

7. 已知复数 $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，则$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)$的值为______.

二、解答题

8. (1) 求证：对任意实数 t，复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$ 的模 $r=|z|$，适合 $r\leqslant\sqrt[4]{2}$.

(2) 当实数 t 取什么值时，复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$ 的辐角主值θ 适合 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$?

9. 设复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$\theta\in(0,\pi)$，$\mu=\frac{1-z^{-4}}{1+z^4}$，$|\mu|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\arg\mu<\frac{\pi}{2}$，求 θ.

10. 设复数 z 在$\frac{(i-1)z}{i(z-2)}$为实数的条件下变动，试求在复平面上复数 z 对应点的轨迹.

11. 利用复数求：

$$A=\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{n},$$

$$B=\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

12. 复数 z_1,z_2,z_3 的辐角分别是 α,β,γ，$|z_1|=1$，$|z_2|=k$，$|z_3|=2-k$，且 $z_1+z_2+z_3=0$，k 为何值时，$\cos(\beta-\gamma)$取得最大值和最小值？最大值、最小值分别是多少？

13. 设 $n\in\mathbf{N}$，求证：方程 $z^{n+1}-z^n-1=0$ 有模为 1 的复根的充分必要条件是 $n+2$ 可以被 6 整除.

第十五讲　复数模的运算

知识点和方法述要

模运算有以下一些基本性质:

(1) $z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$;

(2) $|z|\geqslant|Re(z)|,|z|\geqslant|\mathrm{Im}(z)|$;

(3) $|z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\cdots\cdot|z_n|$;

(4) $|\frac{z_1}{z_2}|=\frac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq0)$;

(5) $|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|$. 与复数 z_1,z_2 对应的向量$\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$反向时取等号;

(6) $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$, 与复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 对应的向量$\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2},\cdots,\overrightarrow{OZ_n}$同向时取等号.

例题精讲

例 1　求复数

$$z=\left|\frac{(3+4i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)(\sqrt{3}-i)(\sqrt{5}\cdot i)}\right|+2i$$

的模.

解　先化简前面一个加数项.

$$\left|\frac{(3+4i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)(\sqrt{3}-i)(\sqrt{5}\cdot i)}\right|$$

$$= \frac{|3+4i|\cdot|2-2i|}{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|\cdot|\sqrt{3}-i|\,|\sqrt{5}i|}$$

$$= \frac{5\times 2}{1\times 2\times\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

于是 $$|z| = |\sqrt{5}+2i| = 3.$$

例 2 复平面上定点 Z_0,动点 Z_1 对应复数分别为 z_0,z_1,其中 $z_0\neq 0$,且满足方程

$$|z_1 - z_0| = |z_1|, \qquad ①$$

另一个动点 Z 对应复数 z 满足

$$z_1\cdot z = -1. \qquad ②$$

求点 Z 的轨迹,并指出它在复平面上的形状和位置.

解 点 Z 依附于点 Z_1,故先做代换.由②得 $z_1=-\frac{1}{z}$,代入①得

$$\left|\frac{1}{z}+z_0\right| = \left|\frac{1}{z}\right|,$$

可得 $|1+z_0z|=1$.因 $z_0\neq 0$,所以

$$\left|z+\frac{1}{z_0}\right| = \left|\frac{1}{z_0}\right|.$$

这是以 $-\frac{1}{z_0}$ 对应点为圆心,$\frac{1}{|z_0|}$ 为半径的圆.又 $z\neq 0$,故所求轨迹为上述不含原点的圆.

例 3 复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=|z_1+z_2|=3$,$|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$,求 $\frac{z_1}{z_2}$ 的值.

分析 题设条件是一系列有关模的等量关系,考虑利用模的几何意义.

由 $|z_1|=|z_1+z_2|=3$,可得

$$\left|\frac{z_2}{z_1}-(-1)\right| = 1. \qquad ①$$

又由 $|z_1-z_2|=\sqrt{3}|z_1|$,可得

$$\left|\frac{z_2}{z_1}-1\right|=\sqrt{3}. \qquad ②$$

①表示点 $A(\frac{z_2}{z_1})$到点 $B(-1)$的距离为 1,②表示点 $A(\frac{z_2}{z_1})$到点 $C(1)$距离为$\sqrt{3}$,由勾股定理知$\triangle ABC$ 为直角三角形,$\angle A=90°$.

因$|AC|>|AB|$,点 A 在第Ⅱ、Ⅲ象限.

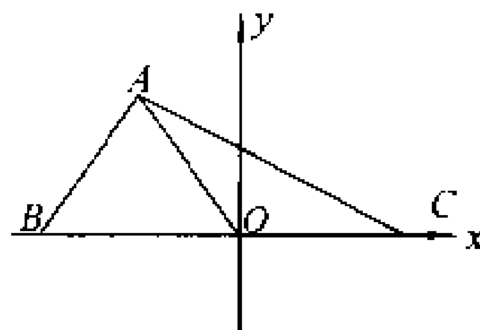


图 15-1

(ⅰ) 当点 A 在第Ⅱ象限时,如图 15-1. $\frac{z_2}{z_1}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$,从而

$$\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

(ⅱ) 当 A 在第Ⅲ象限时,如图 15-2,

$$\frac{z_2}{z_1}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

从而

$$\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

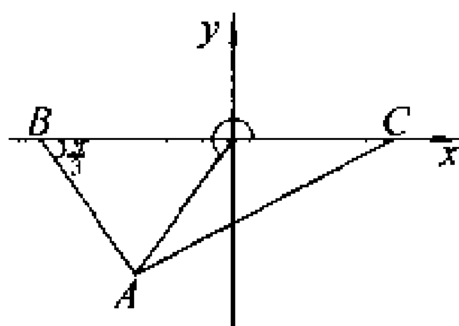


图 15-2

这里,点 A 实际上就是圆 $\left|\frac{z_2}{z_1}-(-1)\right|=1$ 与 $\left|\frac{z_2}{z_1}-1\right|=3$ 的交点.

例 4 二次方程

$$ax^2+x+1=0 \qquad ①$$

的两根的模都小于 2,求实数 a 的取值范围.

分析 ①为实系数一元二次方程,其中

$$\Delta = 1 - 4a (a \neq 0),$$
须分 $\Delta \geqslant 0$、$\Delta < 0$ 两种情况讨论.

(ⅰ) 方程①有实根,设 $f(x) = ax^2 + x + 1 (x \in \mathbf{R})$,欲方程两根之模都小于 2,须

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 1 - 4a \geqslant 0, \\ -2 < -\dfrac{1}{2a} < 2. \end{cases}$$

解之得 $a < -\frac{1}{4}$. 当 $a < -\frac{1}{4}$ 时,函数 $f(x)$ 开口向下,此时还须且只须

$$\begin{cases} f(2) = 4a + 2 + 1 < 0, \\ f(-2) = 4a - 2 + 1 < 0. \end{cases}$$

解之,得 $a < -\frac{3}{4}$.

(ⅱ) 方程①没有实根,则

$$\Delta = 1 - 4a < 0,$$

有
$$a > \frac{1}{4}. \quad ②$$

此时,设方程的两根为 α, β,则 $\bar{\alpha} = \beta$,从而

$$\alpha\beta = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = \frac{1}{a} < 4. \quad ③$$

由②,③可得 $a > \frac{1}{4}$.

综上所述,所求 a 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (\frac{1}{4}, +\infty)$.

例 5 设 P_1、P_2 是复平面上的点集,

$P_1 = \{z \mid z\bar{z} + 3i(\bar{z} - z) + m = 0, z \in C, m \text{ 是实常数}, m < 9\}$,

$$P_2 = \{\omega \mid \omega = 2iz, z \in P_1\}.$$

(1) 当 m 在什么范围内变化时,$P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$;

(2) 令 $m = 5$,设 $z_1 \in P_1, z_2 \in P_2$. 求 $|z_1 - z_2|$ 的最大值和最小

值.

分析 (1) 首要的在于揭开蒙在点集 P_1 的一层"面纱",将

$$z \cdot \bar{z} + 3i(\bar{z} - z) + m = 0$$

变形为

$$(z + 3i)(\bar{z} - 3i) = 9 - m,$$

即 $$|z + 3i|^2 = 9 - m,$$

有 $$|z + 3i| = \sqrt{9 - m}. \qquad ①$$

因 $m<9$,故由①知点集 P_1 是以$(0,-3)$为圆心,$\sqrt{9-m}$为半径的圆.

其次,由 $\omega = 2iz$,得 $z = \frac{\omega}{2i}$,代入上式得

$$|\omega - 6| = 2\sqrt{9 - m},$$

从而知点集 P_2 是以$(6,0)$为圆心,$2\sqrt{9-m}$为半径的圆.

问题等价于确定 m 的取值范围,使$\odot P_1$、$\odot P_2$ 有公共点.为此,m 应满足

$$\sqrt{9 - m} \leqslant \sqrt{45} \leqslant 3\sqrt{9 - m}. \qquad ②$$

这里$\sqrt{45}$是圆心距$|P_1P_2|$,$\sqrt{9-m}$,$3\sqrt{9-m}$分别表示两圆半径的差与和.由②解得 $-36 \leqslant m \leqslant 4$.

(2) 由①知点集 P_1 是圆 M

$$|z + 3i| = 2,$$

点集 P_2 是圆 N

$$|z - 6| = 4.$$

如图 15-3,设直线 MN 与两圆交于A、C、D、B 四点,E、F 分别位于两圆周上,连接 ME、NF,只要 E、F 中有一点不同于A、B,都有

$$\begin{aligned} |AB| &= |AM| + |MN| + |NB| \\ &= |ME| + |MN| + |NF| \\ &> |EF|. \end{aligned}$$

同时,由

$$|ME| + |EF| + |NF| > |MN|,$$

得 $|ME|+|EF|+|NF|>|NC|+|CD|+|DN|$,

从而有$|EF|>|CD|$.

因$|MN|=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$,所以$|AB|=6+3\sqrt{5}$,$|CD|=3\sqrt{5}-6$分别为所求的最大值与最小值.

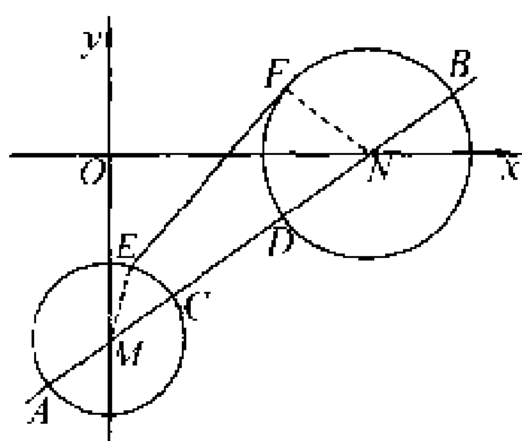


图 15-3

例 6 设复数 z_1,z_2 满足:$|z_1|=|z_1+z_2|=3$,$|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$.试求 $\log_3|(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}|$的值.

分析 如同例 3,可先求得$\frac{z_2}{z_1}$的值,再转而计算 $z_1\overline{z_2},\overline{z_1}z_2$,问题可望解决,这里另作变换:

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})\\&=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\&=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}\\&=9,\end{aligned} \quad ①$$

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})\\&=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2\\&=27.\end{aligned} \quad ②$$

① + ② 得 $$|z_1|^2+|z_2|^2=18. \quad ③$$

③代入①得 $$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=-9. \quad ④$$

因$|z_1|=3$,由③可得$|z_2|=3$.故

$$|z_1\overline{z_2}|=|\overline{z_1}z_2|=9.$$

设 $z_1\overline{z}=(\cos\theta+i\sin\theta)$,则

$$\overline{z_1}\cdot z_2=\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}=9[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]. \quad ⑤$$

由④,⑤得 $18\cos\theta=-9$,即 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$.进而知 $z_1\overline{z_2}=9\omega$ 或 $z_1\overline{z_2}=$

$9\omega^2$,其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.有

$$\begin{aligned}&(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}\\&=9^{2000}(\omega^{2000}+\omega^{4000})\\&=9^{2000}(\omega^2+\omega)\\&=-9^{2000}.\end{aligned}$$

当 $z_1\cdot\overline{z_2}=9\omega^2$ 时,可得同样结果.

例 7 若 z 是复数,$|z|=1$,且

$$u=z^4-z^3-3z^2i-z+1,\qquad ①$$

求 $|u|$ 的最大值和最小值,并求取得最大值和最小值的复数 z.

分析 由于 $|z|=1$,所以 $\overline{z}=\frac{1}{z}$,$\overline{z}^2=\frac{1}{z^2}$,这对系数呈对称性的 u 化简有利,由①得

$$u=z^2(z^2-z-3i-\overline{z}+\overline{z}^2).$$

$$\begin{aligned}|u|&=|z^2|\cdot|z^2+z-3i-\overline{z}+\overline{z}^2|\\&=|z|^2|z^2+\overline{z}^2-(z+\overline{z})-3i|.\end{aligned}\qquad ②$$

设 $z=x+yi(x,y\in\mathrm{R})$,则 $x^2+y^2=1$,代入②,得

$$|u|=|(4x^2-2x-2)-3i|.\qquad ③$$

记 $T=4x^2-2x-2(-1\leqslant x\leqslant 1)$,显然 $-\frac{9}{4}\leqslant T\leqslant 4$.

设 $A(-\frac{9}{4},0)$、$B(4,0)$、$P(0,3)$.问题等价于在线段 AB 上确定点 Q,使 $|PQ|$ 取最大值和最小值(如图 15-4).

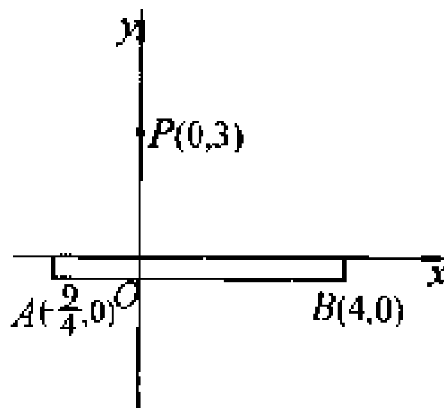


图 15-4

十分明显,点 Q 位于原点时,$|u|=|PQ|=3$,即为所求最小值.此时 $z=1$ 或 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.点 Q 位于 B 点时,$|u|=|PQ|=|PB|=5$ 为最大值.此时,$z=-1$.

例 8 设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为复数,满足

$$|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1,$$

求证:上述 n 个复数中,必存在若干个复数,它们的和的模不小于$\frac{1}{6}$.

证一 设 $z_1=a+bi(a,b\in \mathrm{R})$,则必有

$$|z|\leqslant|a|+|b|.$$

从而
$$1=\sum_{i=1}^{n}|z_i|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|+\sum_{i=1}^{n}|b_i|, \qquad ①$$

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|=\sum_{a_i>0}|a_i|+\sum_{a_i>0}|a_i|, \qquad ②$$

$$\sum_{i=1}^{n}|b_i|=\sum_{b_i>0}|b_i|+\sum_{b_i>0}|b_i|, \qquad ③$$

由①,②,③知 $\sum\limits_{a_i>0}|a_i|$, $\sum\limits_{a_i<0}|a_i|$, $\sum\limits_{b_i>0}|b_i|$, $\sum\limits_{b_i<0}|b_i|$ 中必有一项不小于$\frac{1}{4}$.不妨设 $\sum\limits_{a_i>0}|a_i|\geqslant\frac{1}{4}$,那么

$$\left|\sum_{a_i>0}z_i\right|\geqslant\sum_{a_i>0}a_i\geqslant\frac{1}{4}>\frac{1}{6}.$$

注 这里我们实际上证得了更强的结果.

证二 用直线 $y=x$ 及 $y=-x$ 把复平面分成四个区域.由于 $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1$,所以在上述四个区域中,至少有一个区域所有复数模的和不小于$\frac{1}{4}$.为方便计算,不妨设此区域为包含 x 轴正方向的区域,(否则,由于是取模,可进行旋转变换仍可将问题转化为上面情形),所包含的复数为 $z_t'(t=1,2,\cdots,k)$,令 $z'_t=a'_t+b_t'$, $a'_t, b_t'\in\mathrm{R}$).于是

$$a'_t>|b'_t|,(t=1,2,\cdots,k), \qquad ①$$

且
$$|z'_1|+|z'_2|+\cdots+|z'_k|\geqslant\frac{1}{4}. \qquad ②$$

根据①,有

$$|z'_1|+|z'_2|+\cdots+|z'_k|$$

$$=\sqrt{a'^2_1+b'^2_1}+\sqrt{a'^2_2+b'^2_2}+\cdots+\sqrt{a'^2_k+b'^2_k}$$

$$\leqslant\sqrt{2}(a'_1+a'_2+\cdots+a'_k), \tag{③}$$

且 $|z'_1+z'_2+\cdots+z'_k|$

$$=\sqrt{(a'_1+a'_2+a'_3+\cdots+a'_k)^2+(b'_1+b'_2+\cdots+b'_k)^2}$$

$$\geqslant a'_1+a'_2+\cdots+a'_k. \tag{④}$$

由②,③,④得

$$|z'_1+z'_2+\cdots+z'_k|\geqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}>\frac{1}{6}.$$

例 9 已知 $x^2+y^2\leqslant1, a^2+b^2\leqslant2(x,y,a,b\in\mathrm{R})$,求证:

$$|b(x^2-y^2)+2axy|\leqslant\sqrt{2}.$$

证明 构造复数:$z_1=x+yi, z_2=a+bi(x,y,a,b\in\mathrm{R})$,则 $|z_1|\leqslant1, |z_2|\leqslant\sqrt{2}$,进而,有

$$z_1^2\cdot z_2=(x+yi)^2(a+bi)$$

$$=[(x^2-y^2)+2xyi](a+bi)$$

$$=[a(x^2-y^2)-2bxy]+[b(x^2-y^2)+2axy]i.$$

于是

$$Im(z_1^2\cdot z_2)=b(x^2-y^2)+2axy,$$

$$|b(x^2-y^2)+2axy|=|Im(z_1^2z_2)|$$

$$\leqslant|z_1^2\cdot z_2|=|z_1|^2|\cdot|z_2|\leqslant\sqrt{2}.$$

注 利用复数模的有关性质,通过构造适当的复数证明不等式或求最大(小)值,常使解答简捷,别具一格.

练 习 十 五

一、填空题

1. 若$|z|\leqslant\frac{1}{2}$,$f(z)=|(1+i)z^3+iz|$,则$f(z)$的值域是______.

2. 已知复数$|z+i|+|z-i|=2$,则$|z+i+1|$的最小值是______.

3. 若a、b、c、$d\in\mathbf{R}$,且$a+b=7$,$c+d=9$,则$a+bi$与$c+di$和的模的最小值为______.

4. 方程$z^3+|z|^2=10i$所有根的积为______.

二、解答题

5. 证明:若对复数z_1,z_2有$|z_1-\overline{z_2}|=|1-z_1z_2|$,则$|z_1|$,$|z_2|$中至少有一个等于1.

6. 设方程$ax^2+bx+c=0$的一根为α,且$a>b>c>0$,证明$|\alpha|<1$.

7. 已知$|a|\neq|b|$,$u=\frac{a+bz}{\overline{b}+\overline{a}\overline{z}}$,求证$|u|=1$的充要条件是$|z|=1$.

8. 已知$z_1,z_2\in\mathbf{C}$,且$|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=1$.

(1) 求证:$z_1^3=z_2^3$;

(2) 求$(\frac{z_2}{z_1})+(\frac{z_2}{z_1})^2+\cdots+(\frac{z_2}{z_1})^{30k}(k\in\mathbf{N})$.

9. 设三个不为零的复数z_1,z_2,z_3在复平面上,对应点Z_1、Z_2、Z_3,且满足$z_1+z_2+z_3=0$,$|z_1|=|z_2|=|z_3|$,求证:$\triangle Z_1Z_2Z_3$是正三角形.

10. 设复数Z_1,Z_2满足关系式$Z_1\cdot\overline{Z_2}+\overline{A}Z_1+A\overline{Z_2}=0$,其中$A$为不等于0的复数,证明:

(1) $|Z_1+A||Z_2+A|=|A|^2$.

(2) $\frac{Z_1+A}{Z_2+A}=\left|\frac{Z_1+A}{Z_2+A}\right|$.

11. 已知$z\in C$,$|z|=1$,求$|z^3-z+2|$的最大值.

12. 已知$a_1,a_2\in\mathbf{R}$,$z_1,z_2\in\mathbf{C}$,求证:

$$2|a_1z_1+a_2z_2|^2\leqslant(a_1^2+a_2^2)(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2+z_2^2|).$$

第十六讲　二项式定理

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 组合数 C_n^r 的主要性质：

(1) $C_n^k=C_n^{n-k}$.

(2) $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$.

(3) $C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$.

(4) $C_n^kC_k^m=C_n^mC_{n-m}^{n-k}$.

(5) $C_k^k+C_{k+1}^k+\cdots+C_{k+m}^k=C_{k+m+1}^{k+1}$.

(6) n 为偶数时，$C_1^0<C_n^1<\cdots<C_n^{\frac{n}{2}}$，$C_n^{\frac{n}{2}}>C_n^{\frac{n}{2}+1}>\cdots>C_n^n$；$n$ 为奇数时，$C_1^0<C_n^1<\cdots<C_n^{\frac{n-1}{2}}$，$C_n^{\frac{n+1}{2}}>C_n^{\frac{n+3}{2}}>\cdots>C_n^{n-1}>C_n^n$.

2. 二项式定理

(1) $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n(n\in\mathbf{N})$. 其中右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式，$C_n^r(r=0,1,\cdots,n)$ 叫做二项式系数，$T_{r-1}=C_n^ra^{n-r}b^r$ 表示式中第 $r+1$ 项，叫做二项展开式的通项，它反映出展开式在指数、项数、系数等方面的内在联系，要注意区分二项式系数与项的系数间区别.

(2) 对于二项式 $(a+b)^n$，令 $a=1,b=x$，则有

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k. \qquad (*)$$

(*)式是二项式定理的特殊形式，实际上在(*)式中令 $x=\frac{b}{a}$，再乘以 a^n 即可回到二项式定理的一般形式，如用不同的数值代替(*)式中的 x 就可以得到许多组合恒等式. 例如：

令 $x=1$，得 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$；

令 $x=-1$，得$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k=0$.

同样还可以得到$\sum\limits_{k=0}^{n}2^kC_n^k=(1+2)^n=3^n$.

(3) 二项式定理除了常用于证明组合恒等式外，还可用于判断整除性、作近似计算和估算、证明不等式等.

例 题 精 讲

例 1 证明 $C_{2^m-1}^k$是奇数($k\geqslant1$).

分析 $C_{2^m-1}^k=\dfrac{(2^m-1)(2^m-2)\cdots(2^m-1-k+1)}{1\cdot2\cdots k}$

$$=\frac{2^m-1}{1}\cdot\frac{2^m-2}{2}\cdots\frac{2^m-k}{k}.$$

作进一步化简，令 $i=2^{t_i}p_i(1\leqslant i\leqslant k)$，$p_i$ 为奇数，于是

$$\frac{2^m-i}{i}=\frac{2^m-2^{t_i}p_i}{2^{t_i}p_i}=\frac{2^{m-t_i}-p_i}{p_i},$$

它的分子、分母都是奇数，因 $C_{2^m-1}^k$是整数，所以，它只能是若干个奇数的乘积，即为奇数.

上述结论说明，二项式$(a+b)^n$ 展开式中，当 $n=2^m-1$ 时，它的各项系数均奇数.

例 2 计算：$\sum\limits_{k=0}^{n}kC_n^k$.

分析一 先作变形：$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}kC_n^k&=\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}\\&=n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1})\\&=n\cdot2^{n-1}.\end{aligned}$$

分析二 记 $S=C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n$. 因 $C_n^k=C_n^{n-k}$，故

$$S=nC_n^n+(n-1)C_n^{n-1}+\cdots+2C_n^2+C_n^1,$$

且 $S = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 ++ 2C_n^{n-2} + C_n^{n-1}$.

将上面两式相加,即得

$$2S = n(C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n) = n \cdot 2^n,$$

所以 $S = n \cdot 2^{n-1}$.

例 3 求$(x+1+\frac{1}{x})^7$的展开式中的常数项.

分析 由二项式定理

$$(x+1+\frac{1}{x})^7 = [1+(x+\frac{1}{x})]^7$$

$$= C_7^0 + C_7^1(x+\frac{1}{x}) + \cdots + C_7^r(x+\frac{1}{x})^r + \cdots + C_7^7(x+\frac{1}{x})^7, \quad ①$$

其中第 $r+1(0\leqslant r\leqslant 7)$项为

$$T_{r+1} = C_7^r(x+\frac{1}{x})^r, \quad ②$$

在$(x+\frac{1}{x})^r$的展开式中,设第 $k+1$ 项为常数项,记为 T'_{k+1},那么

$$T'_{k+1} = C_r^k x^{r-k} \cdot (\frac{1}{x})^k = C_r^k x^{r-2k}, \quad ③$$

这里 $0\leqslant k\leqslant r$. 由③得 $r-2k=0$,即 $r=2k$. 这说明 r 为偶数,且 $k=\frac{r}{2}$. 再根据①,②知所求常数项为

$$C_7^0 + C_7^2C_2^1 + C_7^6C_4^2 + C_7^6C_6^3 = 393.$$

例 4 在$(5x-2y)^{20}$的展开式中,第几项系数最大?第几项系数最小?

分析 展开式中第 $k+1$ 项系数为 $C_{20}^k5^{20-k}(-2)^k$,当 k 为偶数时,系数才有可能最大,反之,k 为奇数时,系数才有可能最小,现只须比较系数的绝对值. 考察

$$\begin{cases}\dfrac{C_{20}^{k}\cdot 5^{20-k}\cdot 2^{k}}{C_{20}^{k-2}\cdot 5^{22-k}\cdot 2^{k-2}}\geqslant 1,\\ \dfrac{C_{20}^{k}\cdot 5^{20-k}\cdot 2^{k}}{C_{20}^{k+2}\cdot 5^{18-k}\cdot 2^{k+2}}\geqslant 1.\end{cases}$$

上述不等式组可变为

$$\begin{cases}\dfrac{4(22-k)(21-k)}{25k(k-1)}\geqslant 1,\\ \dfrac{25(k+2)(k+1)}{40(20-k)(19-k)}\geqslant 1.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}\dfrac{-7-\sqrt{401}}{2}\leqslant k\leqslant\dfrac{-7+\sqrt{401}}{2},\\ k\geqslant\dfrac{-11+\sqrt{401}}{2}\text{或 }k\leqslant\dfrac{-11-\sqrt{401}}{2}.\end{cases}$

因 $k\geqslant 0$ 且 $k\in Z$,故 $k=5$ 或 6. 于是展开式的第 6 项系数最小,第 7 项系数最大.

例 5 求 $N=19^{88}-1$ 的所有形如 $d=2^{a}\cdot 3^{b}$(a,b 为自然数)的因子 d 之和.

分析 先考虑 N 的素因数中所含 2 与 3 的最高幂次数,为此将 N 变形.

$$\begin{aligned}N&=(20-1)^{88}-1=(1-4\times 5)^{88}-1\\&=-C_{88}^{1}\times 4\times 5+C_{88}^{2}\times 4^{2}\times 5^{2}-C_{88}^{3}\times 4^{3}\times 5^{3}\\&\quad+\cdots-C_{88}^{87}\times 4^{87}\times 5^{87}+C_{88}^{88}\times 4^{88}\times 5^{88}\\&=-2^{5}\times 55+2^{6}M\\&=2^{5}(-55+2M).\end{aligned}$$

其中 M 为整数. 以上说明, N 的素因数中 2 的最高幂次是 5. 另一方面,

$$\begin{aligned}N&=(1+2\times 9)^{88}-1\\&=C_{88}^{1}\times 2\times 9+\cdots+C_{88}^{88}\times 2^{88}\times 9^{88}\\&=3^{2}\times 2\times 88+3^{3}T\end{aligned}$$

$$= 3^2(2\times 88+3T),$$

其中 T 为整数. 于是, N 的素因数中 3 的最高幂次是 2. 综合起来, 知 $N=2^5\cdot 3^2 Z$, 其中 Z 不含因数 2 和 3, 所有 N 中形如 $2^a\cdot 3^b$ 的因数的和为 $(2+2^2+2^3+2^4+2^5)(3+3^2)=744$.

例 6 设 $n=1990$, 计算

$$\frac{1}{2^n}(1-3C_n^2+3^2C_n^4-3^3C_n^6+\cdots+3^{994}C_n^{1988}-3^{995}C_n^{1990}).$$

解 原式 $=(\frac{1}{2})^{1990}-C_{1990}^2(\frac{1}{2})^{1988}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\cdots+C_{1990}^{1988}(\frac{1}{2})^2(\frac{\sqrt{3}}{2})^{1988}-C_{1990}^{1990}(\frac{\sqrt{3}}{2})^{1990}$.

可以看出上式是 $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{1990}$ 展开式的实部, 而

$$\begin{aligned}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{1990}&=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^{1990}\\&=\cos\frac{1990}{3}\pi+i\sin\frac{1990\pi}{3},\end{aligned}$$

故
$$原式=\cos\frac{1990}{3}\pi=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

例 7 设 $x=(15+\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}$, 求 x 的个位数字.

分析 记 $y=(15-\sqrt{220})^{19}+(15-\sqrt{220})^{82}$, 则

$$\begin{aligned}x+y=&[(15+\sqrt{220})^{19}+(19-\sqrt{220})^{19}]\\&+[(15+\sqrt{220})^{82}+(15-\sqrt{220})^{82}].\end{aligned}$$

由二项式定理知, 对任意自然数 n,

$$(15+\sqrt{220})^n+(15-\sqrt{220})^n=2(15^n+C_n^2 15^{n-2}\cdot 220+\cdots)$$

为整数, 且个位数字为零, 因此, $x+y$ 是个位数字为零的整数, 再对 y 估值. 因为

$$0<15-\sqrt{220}=\frac{5}{15+\sqrt{220}}<\frac{5}{25}=0.2,$$

且
$$(15-\sqrt{220})^{82}<(15-\sqrt{220})^{19},$$

所以 $$0 < y < 2(15-\sqrt{220})^{19} < 2\times 0.2^{19} < 0.4.$$
x 的个位数字为 9.

注 在二项式定理的应用中,将$(a+b)^n$与$(a-b)^n$结合使用较为多见.

例 8 试证:对任意自然数 n,和数$\sum\limits_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}$不能被 5 整除.

分析 记 $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}$, a_n 的表达式和二项展开式中的项有些相似,联想二项式$(1+x)^{2n+1}$,令 $x=\sqrt{8}$,于是

$$(1+x)^{2n+1}=(1+\sqrt{8})^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}(\sqrt{8})^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1}+\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}(\sqrt{8})^{2k} \qquad ①$$

$$=\sqrt{8}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}+\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^{3k}.$$

记 $b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^{3k}$,代入①得

$$\sqrt{8}a_n+b_n=(\sqrt{8}+1)^{2n+1}. \qquad ②$$

根据②的特点,尝试利用

$$\sqrt{8}a_n-b_n=(\sqrt{8}-1)^{2n+1}, \qquad ③$$

②×③可得

$$8a_n^{\ 2}-b_n^{\ 2}=7^{2n+1}. \qquad ④$$

根据二项式定理,可知

$7^{2n+1}=(5+2)^{2n+1}=5T+2^{2n+1}=5T+2\cdot 4^n=5T+2(5-1)^n=5T_1+2\cdot(-1)^n$,

T, T_1 均为自然数,可见 7^{2n+1}被 5 除余数是 ± 2. 若 a_n 可被 5 整除,则 b_n^2 被 5 除余数 ± 2. 但这不可能,任何一个整数的平方被 5 除余数只能是 0, ± 1. 因此, a_n 不能被 5 整除.

例 9 证明: n 为偶数时,

$$(C_n^0)^2-(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(-1)^k(C_n^k)^2+\cdots+(C_n^n)^2$$

$$=C_n^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}}. \qquad ①$$

分析 ①的右边是组合数 $C_n^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}}$，根据其结构，想到它可以是$(1-x^2)^n$中 x^n 的系数（这里 n 是偶数），为了与右边和式沟通，作一变化：

$$(1-x^2)^n=(1+x)^n(1-x)^n. \qquad ②$$

再比较②式两边 x^n 的系数．右边是

$$(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n)$$

$$\times(C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-\cdots+(-1)^kC_n^kx^k+\cdots+(-1)^nC_n^nx^n)$$

$$=(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^k+\cdots+C_n^nx^n)\cdot$$

$$(C_n^n-C_n^{n-1}x+C^{n-2}x^2-\cdots+(-1)^{n-k}C_n^{n-k}x^k+\cdots+C_n^0x^n),$$

这里 n 是偶数．展开后，所有 x^n 项的系数是

$$(C_n^0)^2-(C_n^1)^2+\cdots+(-1)^k(C_n^k)^2+\cdots+(C_n^n)^2.$$

②式左边展开后 x^n 的系数则是 $C_n^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}}$．故①式成立．

练 习 十 六

一、填空题

1. 2^{1000}除以 13 的余数是______．

2. 在$(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{5})^{100}$的展开式中，有理项有______个．

3. $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k+1}C_n^k2^k=$______．

4. 已知$(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2})^n$ 的展开式中，第五项的系数与第三项的系数的比是 10:1，则展开式各项系数的和是______．

5. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2002}$与$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2002}$的和的个位数字是______．

二、解答题

6. 设$(1+x)^{p-2}=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{p-2}x^{p-2}$，$p$ 为奇素数，证明：$a_1+2, a_2-3, a_3+4, \cdots, a_{p-3}-(p-2), a_{p-2}+(p-1)$都可被 p 整除.

7. 证明：$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=\frac{(2n)!}{n!\ n!}$.

8. 已知 $a, b\in \mathrm{R}^+$，$a\neq b$，$n\geqslant 2$，$n\in \mathrm{N}$，求证：$\frac{a^n+b^n}{2}>(\frac{a+b}{2})^n$.

9. 对 $n\geqslant 2, n\in \mathrm{N}$，证明：$2^n<C_{2n}^n<4^n$.

10. 计算：$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2C_n^k$.

11. 设 $n\in \mathrm{N}$，考虑$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$.

(1) 证明：$a_k=a_{2n-k}(1\leqslant k\leqslant n)$；

(2) 求 $a_0+a_3+a_6+a_9+\cdots$的值.

12. 设 $a_i\in \mathrm{R}^+$ 且$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=S$，求证：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\leqslant 1+S+\frac{S^2}{2!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}.$$

13. 设 $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_s$ 都是已知的正整数，且 $n_1+n_2+\cdots+n_s=m$，证明：

$$\sum_{(i,j,k)}n_in_jn_k\leqslant \frac{1}{6}m(m-1)(m-2),$$

其中和号遍及 $1,2,\cdots,s$ 中取三个不同元素的所有可能的组合(i,j,k)（不考虑 i,j,k 的顺序）.

第十七讲 圆

知识点和方法述要

1. (1) 在同圆或等圆中,圆心角相等,则其所对弧及弦相等;若圆心角不等,圆心角大的所对弧亦大;反之也成立.

(2) 过圆心作圆内弦的垂线(直径),必平分其弦及其所对的弧;反之也成立.

(3) 在同圆与等圆中,等弦与圆心的距离相等;反之也成立.

2. (1) 一弧所对的圆周角等于该弧所对圆心角的一半.

(2) 在同圆或等圆中,两弧相等所对圆周角相等;反之亦成立.

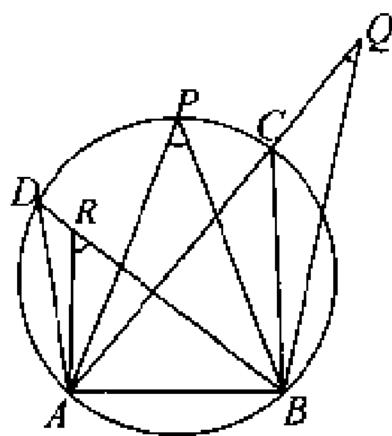


图 17-1

(3) 如图 17-1,从弓形弧内一点到弦的两端点所连线段的夹角大于这弓形的圆周角,这个角叫做圆内角;从弓形外一点到弦的两端点所连线段的夹角小于这弓形的圆周角,这个角叫做圆外角.

3. (1)直线和圆的位置关系:如图 17-2 设圆 O 的半径为 r,圆心 O 到直线 LM 的距离为 d. 若 $d>r$,则圆 O 与直线 LM 相离;若 $d=r$,则圆 O 与直线 LM 相切,LM 叫圆 O 的切线;若 $d<r$,则圆 O 与直

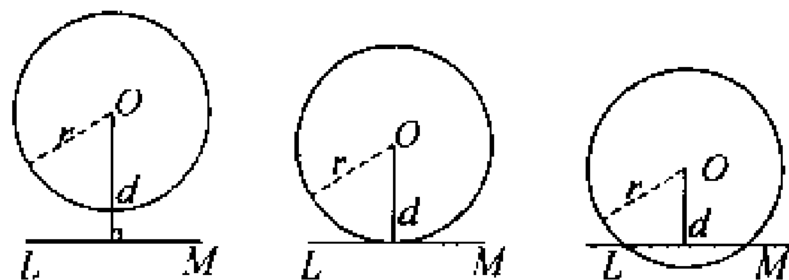


图 17-2

线 LM 相交，LM 叫圆 O 的割线.

(2) 过切点的圆的半径必与切线垂直；过圆心作一切线的垂线必过切点；过切点作圆的切线的垂线必过圆心.

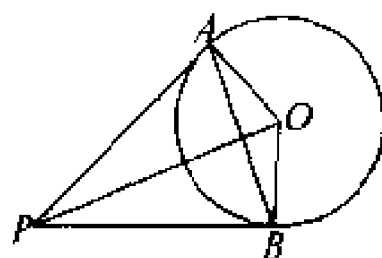


图 17-3

过圆 O 外一点 P 引二切线（如图 17-3），切点为 A、B，则

（ⅰ）$PA = PB = \sqrt{PO^2 - OA^2}$，$\angle PAB = \angle PBA$，$\angle APO = \angle BPO$；

（ⅱ）A、B 两点在以 PO 为直径的圆周上；

（ⅲ）$PO \perp AB$，且平分 AB.

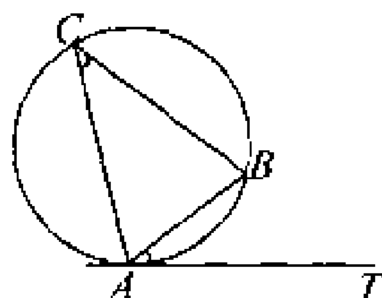
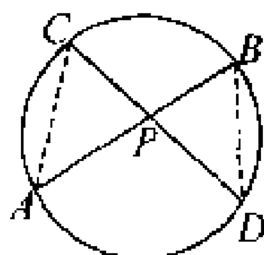


图 17-4

(3) 切线及过其切点的弦所夹角叫弦切角，它等于所夹弧所对的圆周角. 反之，过弦的一端的直线，若与这弦所成的角等于其所对的圆周角，则这条直线为圆的切线（如图 17-4）.

(4) 圆幂定理

（ⅰ）相交弦定理：圆内二弦 AB、CD 或其延长线相交于点 P（如图 17-5），则有 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



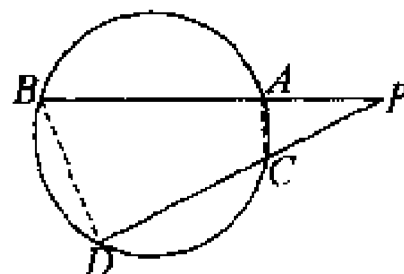


图 17-5

（ⅱ）切割线定理：自圆外一点 P 作圆的切线 PT 及割线 PAB，切点为 T，割线与圆的交点为 A、B，则 $PT^2 = PA \cdot PB$.

（ⅲ）过点 P 作二线 PT 和 PAB，且 A、B 两点位于 PT 同侧，若 $PT^2 = PA \cdot PB$，则 PT 是 $\triangle TAB$ 外接圆的切线（如图 17-6）.

4. (1) 圆内接四边形的对角互补；反之也成立.

(2) 圆内接四边形的外角等于其内对角；反之也成立.

(3) 圆外切四边形两双对边的和相等;反之也成立.

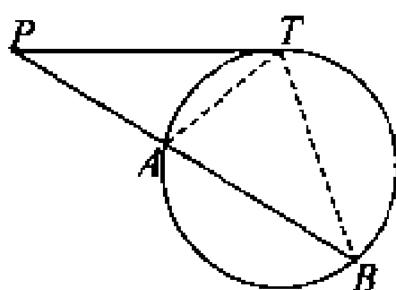


图 17-6

5. 圆与圆的位置关系

(1) 已知两圆的半径为 $r, r'(r > r')$, 两圆圆心间的距离为 d, 则 $r - r' < d < r + r' \Leftrightarrow$ 两圆相交; $d < r - r' \Leftrightarrow$ 两圆内含.

(2) 两圆相切,其切点位于两圆的连心线上.

(3) 两圆相交,两交点所连线段称为两圆的公共弦,它被两圆的连心线垂直平分,相交两圆两个交点关于两圆连心线成轴对称.

(4) 到两外离或内含(同心圆除外)的定圆所引切线长恒相等的点的轨迹,是垂直于两定圆连心线的一条直线:若两圆相交,则为两圆公共弦的延长线;若两圆相切,则为过两圆切点的公切线.这条直线称为两圆的根轴.在三个定圆中,每两定圆的根轴共三条,它们相交于一点或互相平行,这点称三定圆的根心.

例 题 精 讲

例 1 一个机器零件的形状是一个有缺口的圆(如图 17-7),这个圆的半径是 $\sqrt{50}$ cm, AB 的长度是 6cm, BC 的长度是 2 cm, $\angle ABC$ 是直角.求 B 与圆心的距离.

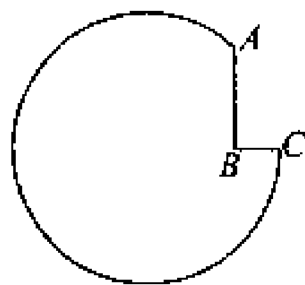


图 17-7

解 如图 17 - 8,补成一个圆 O.连 AC,延长 AB 交$\odot O$ 于 D.连 OA, OB,作 $OE \perp AC$,垂足为 E,作 $OF \perp AB$,垂足为 F,连 CD.

因为 $AB = 6$, $BC = 2$, $\angle ABC = 90°$,故 $AC = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$(cm), $AE = \frac{1}{2}AC = \sqrt{10}$(cm),且

$$OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = 2\sqrt{10}(\text{cm}),$$

$$\tan\angle AOE = \frac{AE}{OE} = \frac{1}{2},$$

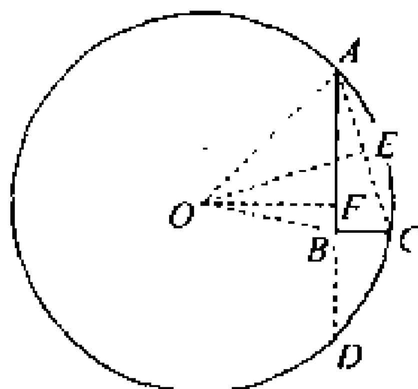


图 17-8

又$\angle BDC = \angle AOE = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$,故 $\tan\angle BDC = \frac{1}{2}$,由 $BC = 2(\text{cm})$得 $BD = 4(\text{cm})$,从而,有

$$AD = AB + BD = 10(\text{cm}),$$

进而有 $DF = 5\text{cm}$, $BF = 1\text{cm}$. 所以

$$OF^2 = OA^2 - AF^2 = 50 - 25 = 25(\text{cm}^2).$$

于是

$$OB = \sqrt{OF^2 + BF^2} = \sqrt{26}(\text{cm}).$$

即为所求.

例 2 已知在$\triangle ABC$中,$AB > AC$,$\angle A$的一个外角的平分线交$\triangle ABC$的外接圆于点E,过$EF \perp AB$,垂足为F.

求证:$2AF = AB - AC$.

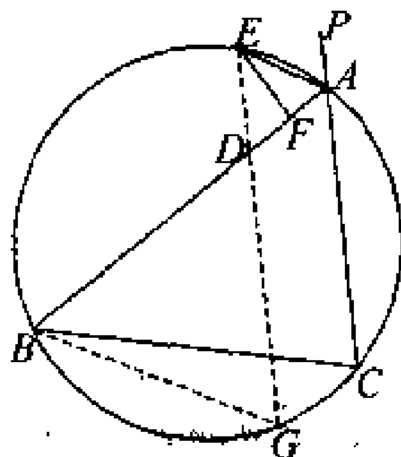


图 17-9

证明 如图 17-9,在FB上取点D,使$FD = FA$,连结ED并延长交圆于G,连接BG,则$\triangle EDA$为等腰三角形,有

$$\angle EDA = \angle EAB = \frac{1}{2}\angle PAB$$

$$= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle C),$$

从而,有

$$\angle AED = 180^\circ - 2\angle EAB = 180^\circ - (\angle ABC + \angle C)$$

$$= \angle BAC.$$

于是$\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{BG} = \overset{\frown}{AC}$,所以 $BG = AC$. 因$\angle G = \angle EAD = \angle EDA = \angle BDG$,故 $BD = BG = AC$ 即 $2AF = AD = AB - AC$.

例 3 如图 17-10,在$\triangle ABC$中,$AB = AC$,D是底边BC上一点,E是线段AD上一点,且$\angle BED = 2\angle CED = \angle BAC$,求证:$BD = 2CD$.

证明 作$\triangle ABC$的外接圆(图 17-11),并延长AD与$\triangle ABC$的外接圆相交于F点,连结CF、BF,则

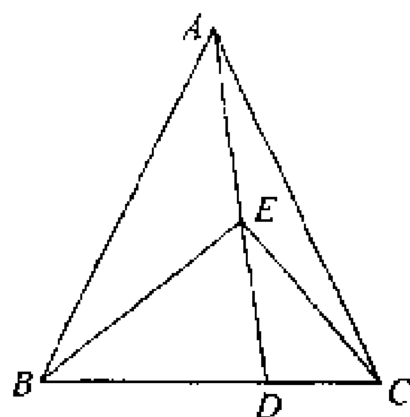


图 17-10

$$\angle BFA = \angle ACB = \angle ABC = \angle AFC,$$

即$\angle BFD = \angle CFD$,所以

$$BF:CF = BD:DC.$$

因$\angle BEF = \angle BAC$,$\angle BFE = \angle ACB$,所以$\angle FBE = \angle ABC = \angle BFE$,有$EB = EF$. 作$\angle BEF$的平分线交$BF$于$G$,则$BG = GF$. 因$\angle GEF = \frac{1}{2}\angle BEF = \angle CEF$,$\angle GFE = \angle CFE$,故$\triangle EFG \cong \triangle EFC$,有$GF = CF$.从而$BF = 2FC$,所以$BD = 2CD$.

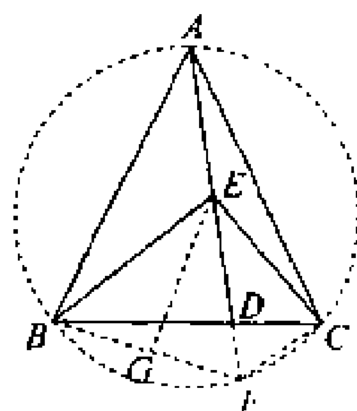


图 17-11

注 每一个三角形都有一个外接圆,正弦定理是沟通三角形与外接圆联系的一条重要通道,但有时需直接作出三角形的外接圆,以便进一步利用圆的性质,导致问题的解决.

例 4 圆M的半径为r,AB是圆M的一条定直径,K是AM上的一个定点.设l是过A点的圆M的切线,设CD是任一过K点的弦,P、Q分别是BC、BD与l的交点,求证:$AP \cdot AQ$为定值.

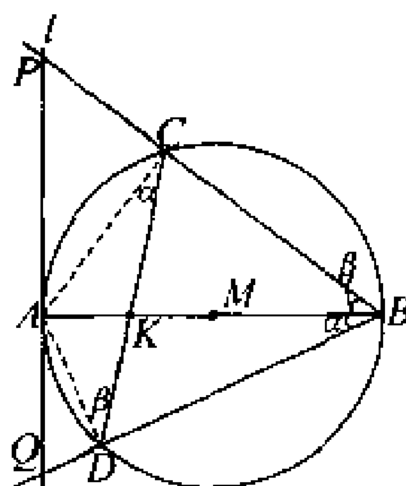


图 17-12

分析 如图 17-12,点D在圆M上,是问题中的一个关键点.设$\angle ABD = \alpha$,$\angle ABC = \beta$,因$AB \perp PQ$,故$AP \cdot AQ = AB^2 \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta$.问题等价于证明$\tan\alpha \cdot \tan\beta$为一定值.

连AC、AD,则$\angle ACD = \alpha$,$\angle ADC = \beta$.注意到AB是直径,故$\angle CAB = \frac{\pi}{2} - \beta$,$\angle DAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$.根据正弦定理和相交弦定理,可得

$$\frac{BK}{AK}=\frac{BK\cdot AK}{AK^2}=\frac{CK}{AK}\cdot\frac{DK}{AK}$$

$$=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\sin\beta}=\cot\alpha\cot\beta.$$

命题获证.

例5 如图 17-13 半圆 O 上一点 C 向直径AB 引垂线,垂足为 D,作$\odot O'$分别切$\widehat{BC}$、CD、DB 于 E、F、G,求证:$AC=AG$.

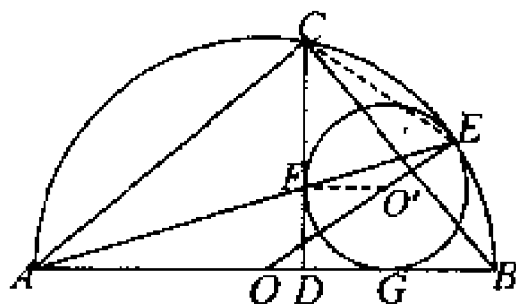


图 17-13

证明 依题设 O、O'、E 在同一直线上,连 $O'F$,依题设 $O'F\perp CD$,有 $O'F\parallel AB$.连 EF、AE,则

$$\angle FEO'=\frac{1}{2}\angle FO'O$$

$$=\frac{1}{2}\angle EOB=\angle OEA,$$

可知 E、F、A 在一直线上.在 Rt$\triangle ABC$ 中,由$\angle ACB=\angle CDB=90°$,可知$\angle ACF=\angle ABC=\angle AEC$,进而可知 AC 是$\triangle CEF$ 外接圆的切线,根据切割线定理,有

$$AC^2=AF\cdot AE=AG^2.$$

所以 $AC=AG$.

例6 已知 AD 和 BC 是$\odot O$ 的两相交弦,其中 B 在 AD 的劣弧上.设$\odot O$ 的半径是 5,$BC=6$,AD 被 BC 等分,又设从 A 出发的弦只有 AD 能被 BC 等分,这样可以知道 AB 劣弧对应的正弦是一个有理数,如果把这个有理数化成最简分数$\frac{m}{n}$,求 mn.

解 如图 17-14,设 AD 和 BC 相交于 P,连 OP.因 $AP=PD$,故 $OP\perp AD$.连 OA、OB、OC,作 $OE\perp BC$ 于 E.设 $PE=x$,则 $BP=3-x$,$PC=3+x$,又设 $PA=PD=y$,因 $OB=5$,$BE=EC$,故 $OE=4$,由

$AP \cdot PD = BP \cdot PC$，得

$$y^2 = (3-x)(3+x) = 9 - x^2, \quad ①$$

又因 P 点惟一，故以 OA 为直径的圆与 BC 相切，于是 $\angle OPE = \angle A$. 因 $\cos A = \dfrac{PA}{OA} = \dfrac{y}{5}$，$\cos\angle OPE = \dfrac{OE}{OP} = \dfrac{x}{\sqrt{16+x^2}}$，所以

$$\frac{y}{5} = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}. \quad ②$$

图 17-14

由①，②解得 $x = 2$，故 $PC = 5$，可知 $\triangle COP$ 为等腰三角形，$\angle CPO = \angle COP$. 因 $\angle A + \angle AOP = 90°$，所以 $\angle COP + \angle AOP = 90°$，根据余弦定理可得

$$\cos\angle BOC = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2 \cdot OB \cdot OC} = \frac{7}{25},$$

进而有 $\sin\angle AOB = \dfrac{7}{25}$，即 $\dfrac{m}{n} = \dfrac{7}{25}$，$mn = 175$.

例 7 如图 17-15，设圆内两弦 AB、CD 交于圆内一点 E，在直线段 EB 的内部取一点 M，然后过点 D、E、M 作圆，再过 E 作此圆的切线分别交直线 BC、AC 于点 F 和 G，若已知 $\dfrac{AM}{AB} = t$，试用 t 表示 $\dfrac{GE}{EF}$.

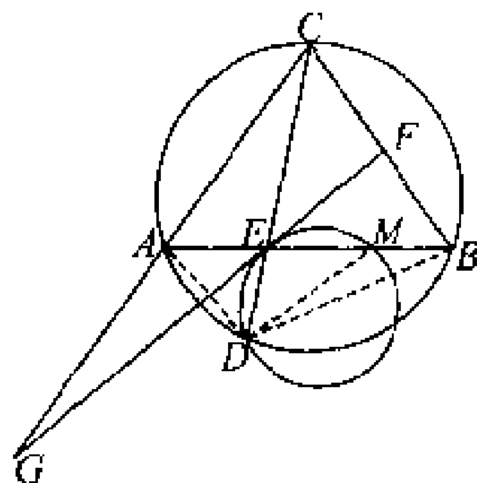


图 17-15

分析 点 M 是问题中的关键点. 直线 GEF 是圆 DEM 的切线.

连结 DA、DB、DM，因 $\angle CEF = \angle DEG = \angle EMD$，且 $\angle ECF = \angle MAD$，所以有 $\triangle CEF \backsim \triangle AMD$，进而，有

$$CE \cdot MD = AM \cdot EF. \quad ①$$

注意到对称结构及①中线段有关三角形，不难发现 $\triangle CGE \backsim \triangle BDM$，这是因为 $\angle ECG = \angle MBD$，$\angle CGE = \angle CEF - \angle ECG =$

$\angle EMD - \angle MBD = \angle BDM$. 于是

$$GE \cdot MB = CE \cdot MD. \quad ②$$

由①,②得

$$GE \cdot MB = AM \cdot EF,$$

即
$$\frac{GE}{EF} = \frac{AM}{MB} = \frac{tAB}{(1-t)AB} = \frac{t}{1-t}.$$

例 8 设 I 是$\triangle ABC$ 的内心,过 I 作 AI 的垂线,分别交边 AB、AC 于 P、Q.求证:分别与 AB 及 AC 相切于 P 及 Q 的圆 L 必与$\triangle ABC$ 的外接圆 O 相切.

证明 如图 17-16,延长 AI 交$\odot O$ 于 M,设$\odot O$ 的半径为 R,连 OL、IC、MC,易知

$$R^2 - LO^2 = LA \cdot LM,$$

即
$$\begin{aligned} LO^2 &= R^2 - LA \cdot LM \\ &= R^2 - LA(IM - IL) \\ &= R^2 - LA \cdot IM + LA \cdot IL \\ &= R^2 - LA \cdot IM + LP^2. \end{aligned}$$

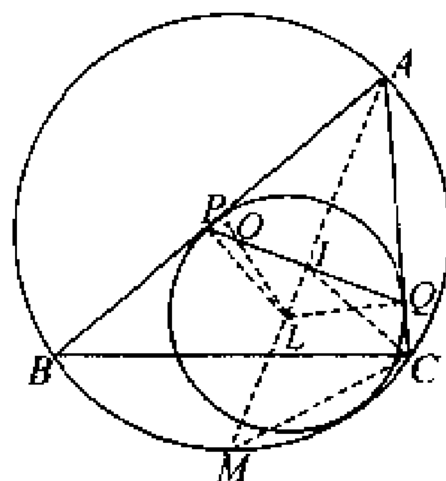


图 17-16

又
$$\begin{aligned} \angle MIC &= \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C \\ &= \angle BCM + \frac{1}{2}\angle C \\ &= \angle MCI. \end{aligned}$$

故 $MI = MC = 2R\sin\frac{A}{2} = 2R \cdot \frac{PL}{AL}$,代入①得

$$\begin{aligned} LO^2 &= R^2 - 2R \cdot PL + LP^2 \\ &= (R - LP)^2, \end{aligned}$$

于是 $LO = R - LP$,命题获证.

例 9 如图 17-17,在凸四边形 $ABCD$ 中,AB 与 CD 不平行,圆 O_1 过 A、B 且与边 CD 相切于 P,圆 O_2 过 C,D 且与边 AB 相切于 Q,圆 O_1 与圆 O_2 相交于 E、F,求证:EF 平分线段 PQ 的充分必要条件是 $BC /\!/ AD$.

证明 延长 BA 与 CD 相交于 M. 延长 PQ 分别交圆 O_1 和圆 O_2 于 S 和 R，设 EF 与 PQ 相交于 K，记 $MA=a$, $MB=b$, $MC=c$, $MD=d$, $MP=p$, $MQ=q$，如图 17－18，有 $b>a$, $c>d$, $p^2=ab$, $q^2=cd$，又

$$KP\cdot KS=KE\cdot KF=KQ\cdot KR.$$

有
$$\frac{PR}{KP}=\frac{KR}{KP}-1=\frac{KS}{KQ}-1=\frac{QS}{KQ}.$$

从而，有

$$KP=KQ\Leftrightarrow PR=QS$$
$$\Leftrightarrow PR\cdot PQ=QS\cdot PQ$$
$$\Leftrightarrow DP\cdot PC=AQ\cdot QB$$
$$\Leftrightarrow (p-d)(c-p)=(q-a)(b-q)$$
$$\Leftrightarrow p(c+d)=q(a+b)$$
$$\Leftrightarrow p^2(c+d)^2=q^2(a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow ab(c+d)^2=cd(a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow abc^2-a^2cd+abd^2-b^2cd=0$$
$$\Leftrightarrow ac(bc-ad)+bd(ad-bc)=0$$
$$\Leftrightarrow (ac-bd)(bc-ad)=0$$
$$\Leftrightarrow ac=bd$$
$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{c}{d}$$
$$\Leftrightarrow BC/\!/AD.$$

命题获证.

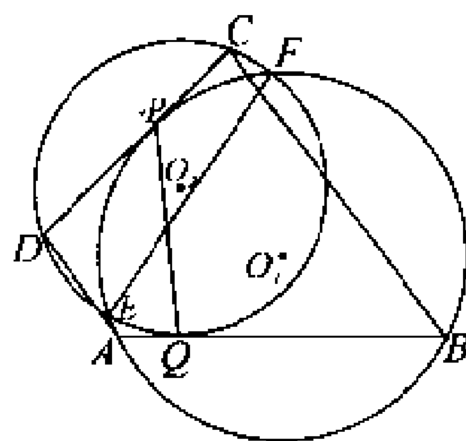


图 17-17

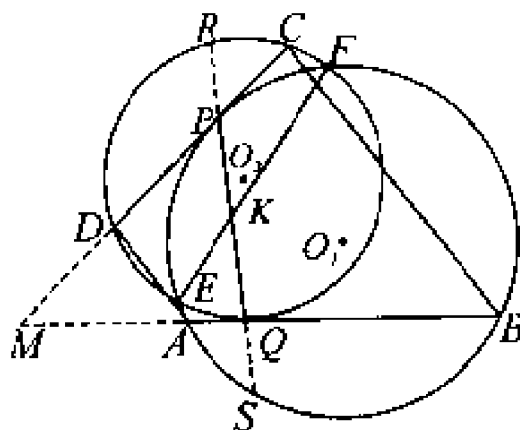
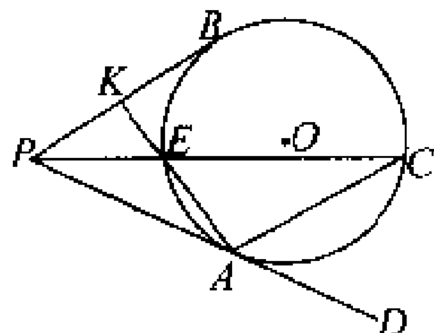


图 17-18

练 习 十 七

1. 如图所示，PA、PB 切$\odot O$ 于 A、B，$AC /\!/ PB$，C 在$\odot O$ 上，PC 交$\odot O$ 于另一点 E，AE、PB 交于 K，求证 $PK = KB$.



（第 1 题）

2. AB 是圆的直径，C、D 是同一个半圆上的两点，若 AC 和 AD 的延长线分别交过点 B 的切线于点 E、F，且 $BF = EF$. 求证 $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.

3. 已知直径 AB 的延长线上有一点 P，过点 P 任作一割线交此圆于点 M、N，N' 是 N 关于 AB 的对称点，设 MN' 交 AB 于点 D，求证：$\frac{PA}{AD} = \frac{PB}{BD}$.

4. $\triangle ABC$ 中，AM 是 BC 边上的中线，AT 是$\angle A$ 的平分线，过 A、T、M 三点作圆分别交 AB、AC 于点 D、E，求证 $BD = CE$.

5. 已知 H 是$\triangle ABC$ 的垂心，以 AH 为直径的圆与$\triangle ABC$ 的外接圆交于另一点 F，求证：直线 FH 平分 BC.

6. 设$\triangle ABC$ 的内切圆分别切 BC、CA、AB 于点 D、E、F 过点 E 作 BC 的平行线，交 AD 于点 G，交 DF 于点 H，则 $EG = GH$.

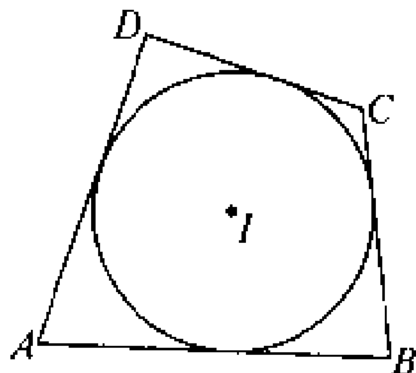
7. 试证明圆内接四边形对角线的交点在一组对边上的两个射影点关于另两边中点的连线对称.

8. 如图所示，四边形 $ABCD$ 外切于$\odot I$，设

$$M = AD \cdot \sin A \sin D + BC \sin B \sin C,$$

$$N = AB \cdot \sin A \sin B + CD \sin C \sin D.$$

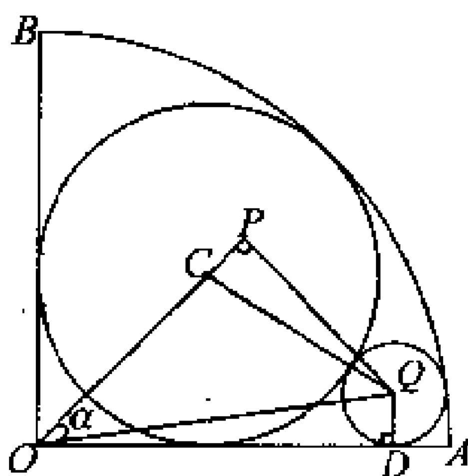
求证：$M = N$.



（第 8 题）

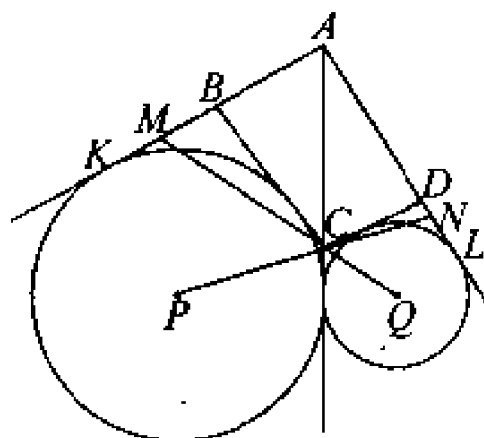
9. 如图所示，在直角扇形 OAB 中作内切圆⊙C，又在半径 OA、$\overset{\frown}{AB}$、⊙C 间的缝隙中作内切圆⊙Q，$QP\perp OC$ 于 P.

求证：$\triangle OPQ$ 的三边成等差数列.



(第9题)

10. 设四边形 $ABCD$ 是平行四边形，⊙P 与边 BC、AB 的延长线及对角线 AC 相切，且⊙P 与直线 AB 切于 K，⊙Q 与直线 AD 切于 L. 若直线 AB、QC 相交于 M 点，直线 AD、PC 相交于 N 点(如图)，求证 $KM=NL$.



(第10题)

11. 在圆内给定一条弦 MN，对圆内任意直径 AB，设 C 为 AM 与 BN 的交点，过 C 作 AB 的垂线 l，证明：所有这样的 l 过一定点.

12. B、C 是圆 O 上两定点，A 是$\overset{\frown}{BC}$的中点，在$\overset{\frown}{BAC}$上任取一点 P，求证：$AP^2+BP\cdot CP$ 为定值.

13. ⊙O_1，⊙O_2，半径分别为 R，r，$R\geqslant\sqrt{2}r$，且 $O_1O_2=\sqrt{R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2}}$，$A$ 是⊙O_1 上一点，直线 AB、AC 分别切⊙O_2 于 B、C，交⊙O_1 于 D、E，求证：$BD\cdot CE=r^2$.

第十八讲　共圆点　点共线　线共点

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 在同一圆周上的若干点称为共圆点，或称这些点共圆. 共圆点问题一般都转化为四点共圆，以点共圆（尤其是四点共圆）为基础可以解决不少较为复杂的几何问题.

判定四点共圆的常用定理是：

（ⅰ）四边形的两个对角互补，则四顶点共圆；

（ⅱ）两三角形有公共边，且在公共边同侧有相等的顶角，则四顶点共圆；

（ⅲ）若四边形的一个外角等于它的内对角，则四顶点共圆；

（ⅳ）若二线段 AB 和 CD 相交于 E，且 $AE\cdot EB=CE\cdot ED$，则 A、B、C、D 四点共圆；

若相交于 P 点的二线段 PB、PD 上知有一点 A、C 且 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，则 A、B、C、D 四点共圆；

（ⅴ）若四点 A、B、C、D 与某一定点等距，则 A、B、C、D 四点共圆；

（ⅵ）托勒密定理的逆定理(见第二十讲).

证明多点共圆往往是以四点共圆为基础实现的.

2. 在同一直线上的若干点称为共线点，或称这些点共线. 共线点问题一般转化为三点共线.

判定三点共线的常用定理和方法是：

（ⅰ）利用平角的定义；

（ⅱ）利用对顶角定理的逆定理；

（ⅲ）利用特殊点、线的性质；

（ⅳ）梅涅劳斯定理(见第二十讲).

3. 通过同一点的若干直线称为共点线，或称这些直线共点．共点问题一般表现为判定三线共点．

判定三线共点的常用定理和方法是：

(ⅰ) 证明三直线都过某一特殊点；

(ⅱ) 证明某一直线过另两直线的交点；

(ⅲ) 转化为三点共线的证明；

(ⅳ) 利用塞瓦定理(见第二十讲)．

4. 通过同一点的若干圆称为共点圆，或称这些圆共点，共点圆问题一般转化为四点共圆．

例 题 精 讲

例 1 已知$\triangle ABC$内接于圆S，点S为圆心，直线l垂直于直线AS且与直线AB、AC分别交于点D、E，求证：B、C、D、E四点共圆．

证明 (ⅰ) 如图 18-1，直线l与$\triangle ABC$的两边相交且与圆S交于两点M、N，由于$AS\perp MN$，故$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{AN}$，进而有

$$\angle ADE \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MB}+\overset{\frown}{AN}) \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MB}+\overset{\frown}{AM}) = \angle C,$$

故知B、C、D、E四点共圆．

(ⅱ) 如图 18-2，直线l与$\triangle ABC$的两边交于反向延长线上，延

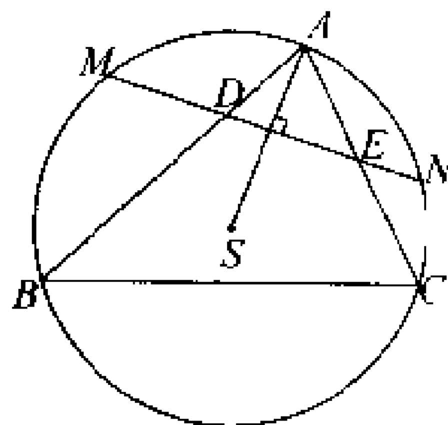


图 18-1

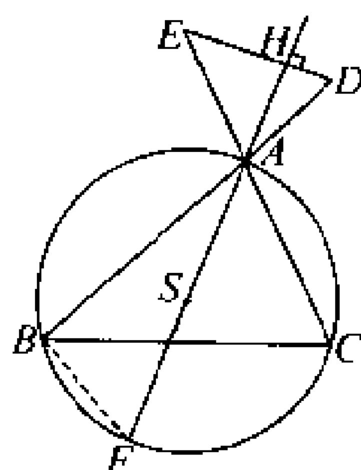


图 18-2

长 AS 交圆 S 于 F，连结 BF，于是

$$\angle AED = 90° - \angle EAH = 90° - \angle FAC = 90° - \angle FBC = \angle ABC,$$

所以 B、C、D、E 四点共圆.

（iii）如图 18－3，直线 l 与边 AB 交于 D 而与 AC 延长线交于 E，交圆 S 于两点 M、N.

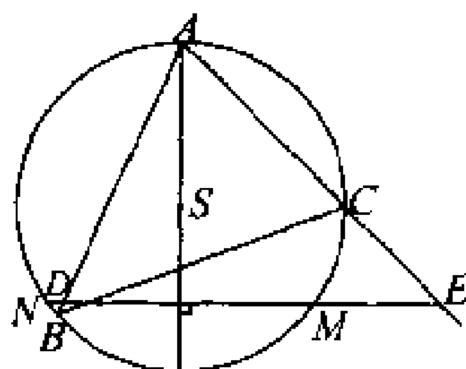


图 18－3

$$\angle B \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$$

$$\overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{MC})$$

$$\overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AN} - \overset{\frown}{MC})$$

$$= \angle E,$$

所以 B、C、D、E 四点共圆.

类似地可以证明，当直线 l 分别与边 AB、AC 的延长线相交时命题成立.

例 2 在锐角$\triangle ABC$ 中，以 BC 为直径作圆与 BC 边上高 AD 及其延长线交于 M、N，以 AB 为直径作圆与 AB 边上的高 CE 及其延长线交于 P、Q，求证：M、N、P、Q 四点共圆.

证一 如图 18－4，设 AD、CE 交于 H，依题设$\angle AEC = \angle ADC = 90°$，$A$、$E$、$D$、$C$ 四点共圆. 根据相交弦定理，有

$$HA \cdot HD = HC \cdot HE. \quad ①$$

又根据相交弦定理，依题设有

$$HP \cdot HQ = HA \cdot HD \quad ②$$

$$HM \cdot HN = HC \cdot HE. \quad ③$$

由①、②、③可得

$$HP \cdot HQ = HM \cdot HN.$$

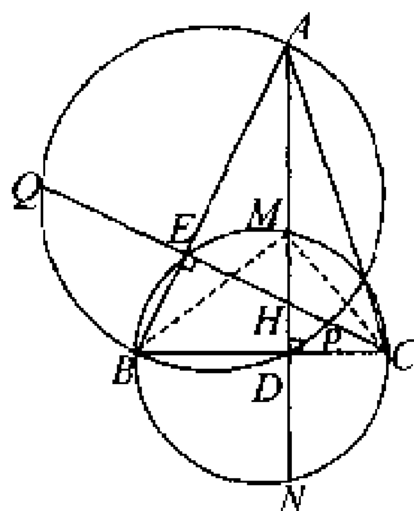


图 18－4

故 M、N、P、Q 四点共圆.

证二 连 BM、CM,依题设$\angle BMC = 90°$,又 $AD \perp BC$,所以 $BM^2 = BD \cdot BC$,即得

$$BM = BN = \sqrt{BD \cdot BC}.$$

同理 $$BP = BQ = \sqrt{BE \cdot BA}.$$

又$\angle AEC = \angle ADC = 90°$,即 A、E、D、C 四点共圆,由切割线定理知

$$BD \cdot BC = BE \cdot BA,$$

所以 $BM = BN = BP = BQ$,故 M、N、P、Q 在以 B 为圆心,BN 为半径的圆上.

例 3 如图 18-5,已知$\triangle ABC$ 是锐角三角形,$\angle BAC = 60°$,H、O、I 分别是$\triangle ABC$ 的垂心、外心和内心,$BH = OI$,求$\angle ABC$ 和$\angle ACB$.

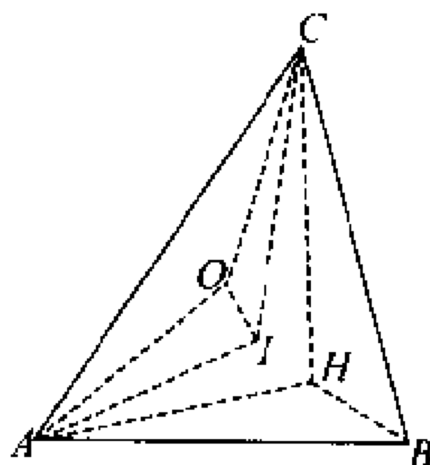


图 18-5

解 由$\angle BAC = 60°$可知

$$\angle COB = 2\angle CAB = 120°,$$

$$\angle CIB = 90° + \frac{1}{2}\angle CAB = 120°,$$

$$\angle CHB = 180° - \angle CAB = 120°.$$

又 O、I、H 在$\triangle ABC$ 内部,故 C、O、I、H、B 共圆.因 $BH = OI$,故$\angle HCD = \angle OCI$.注意到$\angle HCB = 90° - \angle ABC = \angle OCA$,所以

$$\angle ACO = \angle OCI = \frac{1}{2}\angle ACI = \frac{1}{4}\angle ACB,$$

即 $$90° - \angle ABC = \frac{1}{4}(120° - \angle ABC).$$

所以$\angle ABC = 80°$,进而有$\angle ACB = 40°$.

例 4 设 PQ 为圆 O 的一弦,M 为 PQ 的中点,过 M 任作弦 AB、CD 连 AD、BC 分别交弦 PQ 于 E、F.求证:$ME = MF$.

证明 如图 18-6,作弦 AB 关于过点 M 的直径的对称弦 A_1B_1.

由圆的对称性知 Q、A_1、B_1 分别为 P、A、B 关于 GH 的对称点，于是 $AM=A_1M$，$\angle AME=\angle A_1MF$，$\overset{\frown}{BQ}=\overset{\frown}{B_1P}$. 连接 A_1C、A_1F，有

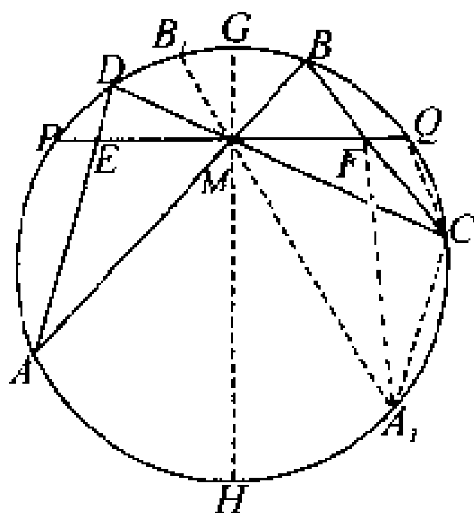


图 18－6

$$\begin{aligned}\angle MFB &= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PB}+\overset{\frown}{QC})\\ &= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{B_1Q}+\overset{\frown}{QC})\\ &= \frac{1}{2}\overset{\frown}{B_1C}=\angle MA_1C.\end{aligned}$$

又 M、A、C、F 四点共圆，$\angle EAM=\angle MCB=\angle MA_1F$，所以 $\triangle AME\cong\triangle A_1MF$，有 $ME=MF$.

注 例 4 所证明的命题即蝴蝶定理.

例 5 BC 为圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦，圆 C_1 的圆心 A 在圆 C_2 上，设 D 为圆 C_2 上一点，过 D 作圆 C_1 的两条切线，切点为 E、F，G 为 AD、BC 交点. 求证：E、F、G 三点共线.

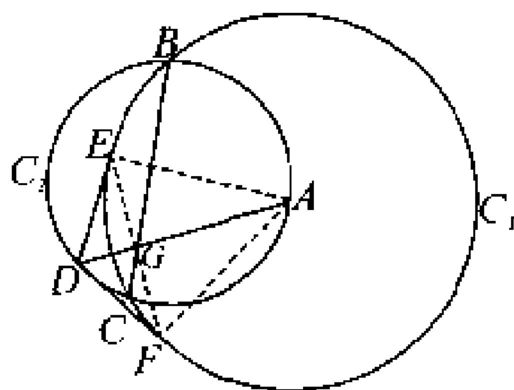


图 18－7

证明 如图 18-7，设 EG 交圆 C_1 于 F'，连 AF'、AE、DF'，由 D、B、A、C 共圆及 B、E、F'、C 共圆可知

$$AG\cdot GD=BG\cdot GC=EG\cdot GF',$$

故 A、E、D、F' 四点共圆. 又 $AE\perp ED$，故有 $AF'\perp DF'$，DF' 为圆 C_1 的切线，因此 F、F' 重合，E、F、G 共线，命题获证.

例 6 已知 P 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的 $\overset{\frown}{ABC}$ 上异于 A、B、C 的动点，X、Y 分别是 AP 和 BP 上的点，$AX=AC$，$BY=BC$. 求证：直线 XY 通过一个定点.

证明 如图 18－8，分别以 A、B 为圆心，AC、BC 长为半径作圆交于 C、D. 显然 X、Y 分别在这两个圆上，下面证明直线 XY 恒过点

D,即证 X、Y、D 三点共线.

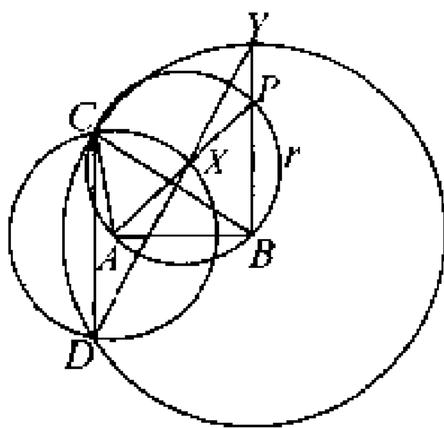


图 18-8

因$\angle XAC=2\angle XDC$,$\angle YBC=2\angle YDC$,且$\angle PBC=\angle PAC$,$\angle PBC=\angle YBC$,$\angle PAC=\angle XAC$,故$\angle XDC=\angle YDC$,X、Y、D 三点共线,命题获证.

例 7 圆内接四边形 $ABCD$ 中,AC、BD 交于 O,AB 和 CD 的中点分别用 U、V 表示,求证:过点 O、U 和 V 分别垂直于 AD、BD 和 AC 的三条直线相交于一点.

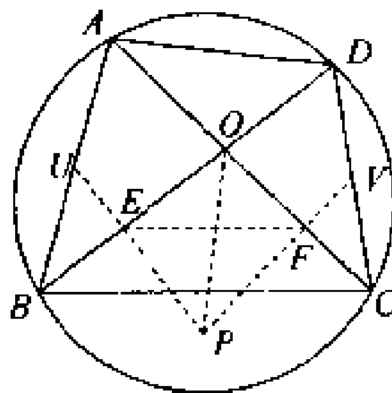


图 18-9

证明 如图 18-9,设 $UP\perp BD$ 于 E,$VP\perp AC$ 于 F,则 O、E、P、F 四点共圆,连 EF、OP,于是 $\cos\angle ACD=\dfrac{CF}{CV}$,$\cos\angle ABD=\dfrac{EB}{BU}$,$\angle ACD=\angle ABD$,故$\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{EB}{BO}$,又$\triangle AOB\backsim\triangle DOC$,有$\dfrac{CO}{CD}=\dfrac{BO}{BA}$,所以$\dfrac{CF}{CO}=\dfrac{EB}{BA}$. 可知 $EF/\!/BC$,于是$\angle EFO=\angle BCA=\angle ADO$.因

$$\angle EOP=\frac{\pi}{2}-\angle EPO=\frac{\pi}{2}-\angle EFO,$$

故
$$\angle EOP+\angle ADO=\frac{\pi}{2},$$

即 $OP\perp AD$,命题获证.

例 8 在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 上取异于 A 和 B 的点 E,线段 AC 和 DE 交于点 F.求证:$\triangle ABC$、$\triangle CDF$ 和$\triangle BDE$ 的外接圆三圆共点.

证明 分两种情形考虑:

(ⅰ) $\triangle ABC$ 与$\triangle CDF$ 的外接圆相交,除 C 外还有另一交点 K. 现只须证明 B、D、E、K 四点共圆.若 K 与 B 或 D 重合,则结论成立,否则,因点 C、F、K 是同一圆上不同三点,A、F、C 共线,故 K 与 A 不重合,于是 K 异于 A、B、D,连结 BK、CK、DK,于是

$$\angle EBK = \angle ABK = \angle ACK$$
$$= \angle FCK = \angle FDK = \angle EDK.$$

故 B、E、K、D 四点共圆(如 18-10).

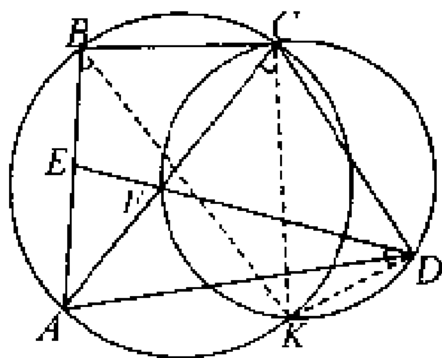


图 18-10

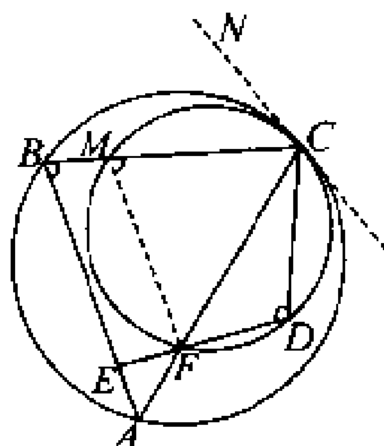


图 18-11

(ⅱ) $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDF$ 的两个外接圆内切于 C,如图 18-11. 只须证明 B、C、D、E 四点共圆. 设 BC 与 $\triangle CDF$ 外接圆交于 M,过 C 作圆 ABC、CDF 的公切线 CN,有 $\angle ABC = \angle FMC = \angle NCB$,因四边形 $CDFM$ 内接于圆,故

$$\angle FMC + \angle FDC = 180°,$$

进而,有

$$\angle ABC + \angle FDC = 180°,$$

故 B、C、D、E 四点共圆(图 18-11).

例 9 如图 18-12 所示,已知四边形 $ABCD$ 相似于四边形 $AB_1C_1D_1$. 求证: BB_1、CC_1、DD_1 三线共点的充要条件是四边形 $ABCD$ 内接于圆.

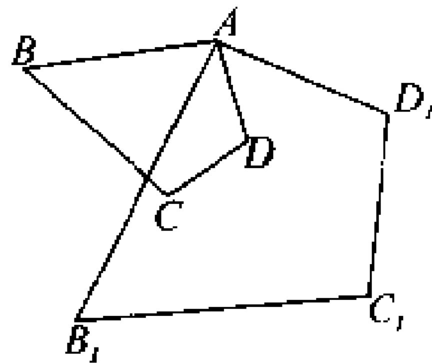


图 18-12

证明 先证充分性. 设 BB_1 交 DD_1 于点 E,连结 EC、EC_1、BD、AE、B_1D_1(图 18-13),因 $\angle BAB_1 = \angle DAD_1$,且 $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AD}{AD_1}$,故 $\triangle BAB_1 \backsim \triangle DAD_1$. 所以 $\angle ABB_1 = \angle ADD_1$, A、B、E、D 四点共圆. 因 A、B、C、D

共圆，故 A、B、E、C、D 共圆，$\angle ABD=\angle AED$. 又因 $\angle ABD=\angle AB_1D_1$，所以 $\angle AED=\angle B_1EC$，则 A、E、B_1、D_1 四点共圆，进而 A、E、B_1、C_1、D_1 五点共圆，$\angle BDC=\angle B_1EC$. 又 $\angle BDC=\angle B_1EC_1$，所以 $\angle CEB_1=\angle C_1EB_1$. 于是，$E$、$C$、$C_1$ 三点共线，故 BB_1、CC_1、DD_1 三线共点.

再证必要性. 连接 AE、BD、AC、B_1D、AC_1（如图 18-14）. 如前所述，A、B、E、D 四点共圆，有 $\angle AED=\angle ABD$. 又因 $\angle AB_1D_1=\angle ABD$，所以 $\angle AED=\angle AB_1D_1$，$A$、$E$、$B_1$、$D_1$ 四点共圆，易知 $\triangle ADD_1\backsim\triangle ACC_1$，故 $\angle AD_1E=\angle AC_1E$，于是 A、D_1、C_1、E 四点共圆. 因四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似，故也为圆内接四边形.

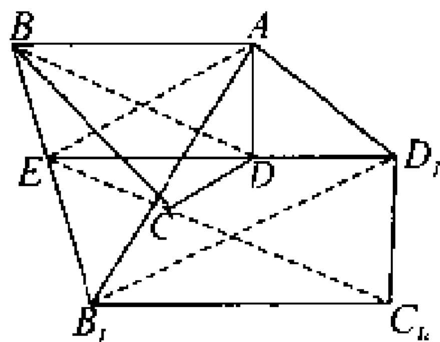


图 18-13

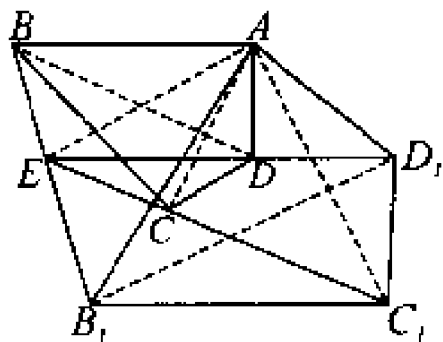


图 18-14

练 习 十 八

1. 在 $\triangle ABC$ 中，AB 和 AC 各自的中垂线分别交 AC 和 AB 或其延长线于点 D、E，求证：B、D、C、E 四点共圆.

2. I 是 $\triangle ABC$ 的内心，而 $\triangle BIC$ 的外接圆圆心为 P，求证：(1) A、I、P 三点共线；(2) A、B、P、C 四点共圆.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60°$，H、I、O 分别为其垂心、内心和外心. 求证：(1) B、C、I、H、O 五点共圆；(2) $AO=AH$；(3) 直线 OH 和 AB、AC 相交成正三角形.

4. 设 P、M 分别在正方形 $ABCD$ 的边 DC、BC 上，PM 与以 A 为圆心，AB 为半径的圆相切，线段 PA 与 MA 分别交对角线 BD 于 Q、

N,证明五边形 $PQNMC$ 内接于圆.

5. 设 I 为三角形 ABC 的内心,且 A'、B'、C' 分别是三角形 IBC、ICA、IAB 的外心,求证:三角形 ABC 与三角形 $A'B'C'$ 有相同的外心.

6. 证明:如果凸五边形 $ABCDE$ 有 $\angle ABC=\angle ADE$, $\angle AEC=\angle ADB$,那么 $\angle BAC=\angle DAE$.

7. 已知 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,M 是 BC 的中点,D 是 HM 延长线与 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点,求证:(1) $HM=MD$;(2) AD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径.

8. 已知,H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,M 和 N 分别是 BC 和 AH 的中点,直线 MN 交以 AH 为直径的圆于 T、S,求证:AT、AS 平分 $\angle BAC$ 及其邻补角.

9. 在 $\triangle ABC$ 中,$AB\neq AC$,I 是它的内心,过 I 作一圆与边 AB 切于 B,与直线 AC 交于 D 和 E,求证 IC 平分 $\angle DIE$.

10. 求证:过圆内接四边形各边的中点向对边所作的四条垂线交于一点.

11. 若过一点的三个圆的三个不同的交点共线,则三个圆的圆心和它们的公共点共圆.

12. AB 是半圆 O 的直径,过 AB 引弦 AC 和 BD,并过 C、D 引圆 O 的切线交于点 P,过 P 作 $PE\perp AB$ 于 E,则 AC、BD、PE 三线共点.

第十九讲 面 积

知识点和方法述要

1. $\triangle ABC$ 中，设 h_a 为 a 边上的高，R、r 分别为 $\triangle ABC$ 外接圆、内切圆之半径，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C=rp=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=2R^2\sin A\sin B\sin C=\frac{abc}{4R}.$$

三角形的面积公式形式多样，注意根据问题需要灵活选取.

2. (1) 相似三角形面积的比等于相似比的平方；

(2) 等底(或等高)的三角形、平行四边形的面积比等于其所对应的高(或底)之比.

3. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 间夹角为 α，则 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$.

4. 共边定理　如图 19－1，若直线 AB 与 PQ 交于 M，则

$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}=\frac{PM}{QM}.$$

5. 共角定理　若 $\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$ 相等或互补，则

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}.$$

推论　若四边形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 的对角线的夹角相等或互补，则

$$\frac{S_{\triangle ABCD}}{S_{\triangle A'B'C'D'}}=\frac{AC\cdot BD}{A'C'\cdot B'D'}.$$

6. 面积割补、等积变换是常用手段.

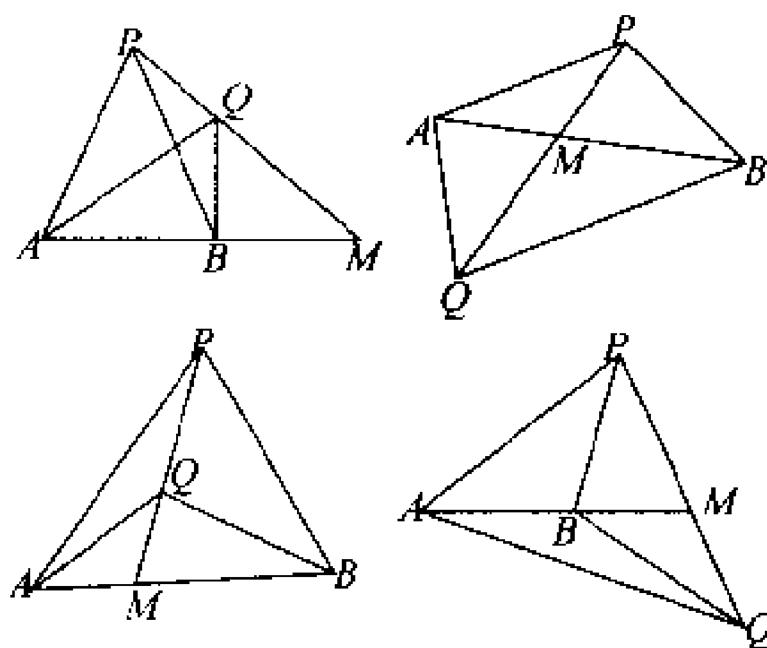


图 19-1

例 题 精 讲

例1 如图 19-2,四边形 $ABCD$ 中,K、M 是 AB、CD 的中点,L、N 是 BC、DA 上的点,四边形 $KLMN$ 是矩形,证明:$S_{ABCD}=2S_{KLMN}$.

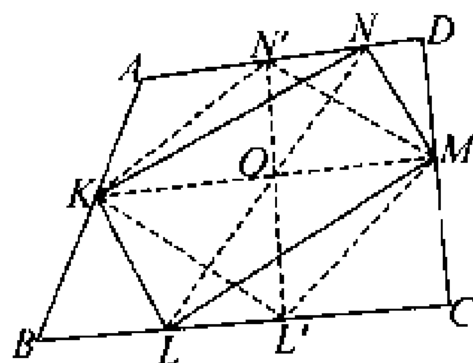


图 19-2

证明 取 BC、AD 中点 L'、N',则 $KL' \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}AC$,$MN' \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}AC$,故四边形 $KL'MN'$ 是平行四边形.若 L' 与 L,N' 与 N 分别重合,则

$$S_{KLMN}=S_{K'L'M'N'}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

若 L' 与 L,N' 与 N' 不重合,由于 KM 的中点同时也是 NL,$N'L'$ 的中点,故四边形 $LL'NN'$ 为平行四边形,$BC /\!/ AD /\!/ KM$.设 AD、BC 间距离为 h,则

$$S_{KLMN}=\frac{1}{2}KM\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{BC+AD}{2}\cdot h=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

命题获证.

例 2 锐角$\triangle ABC$的顶点A的内角平分线交BC于L,又交三角形的外接圆于N,过L分别作AB和AC边的垂线KL和LM,垂足是K和M,求证:四边形$AKNM$的面积等于$\triangle ABC$的面积.

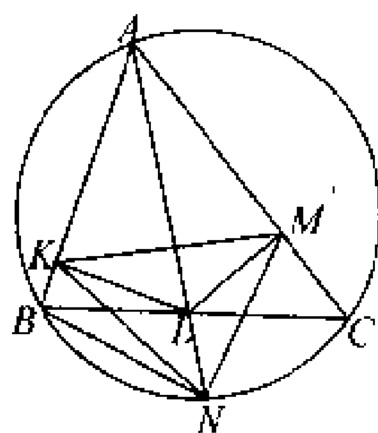


图 19-3

证一 如图 19-3,显然$KM\perp AN$,所以$S_{AKNM}=\frac{1}{2}AN\cdot KM$.因

$$AN=2R\sin\angle ABN$$

$$=2R\sin(\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BAC),$$

$$KM=AL\sin\angle BAC$$

$$=\frac{AC}{\sin\angle ALC}\cdot\sin\angle C\cdot\sin\angle BAC$$

$$=\frac{AC}{\sin(\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BAC)}\cdot\sin\angle C\cdot\sin\angle BAC,$$

所以

$$S_{AKNM}=R\cdot AC\cdot\sin\angle C\cdot\sin\angle BAC$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin\angle BAC=S_{\triangle ABC}.$$

证二 作$\triangle ABC$的高AH,连KH、HM、HN、BN、CN(图 19-4),A、K、H、L、M五点共圆,有$\angle KHB=\angle BAL=\angle NAC=\angle HBN$,$\angle MHC=\angle MAN=\angle NAB=\angle NCH$,故知$KH\parallel BN$,$HM\parallel NC$,从而有$S_{\triangle KBH}=S_{\triangle KHN}$,$S_{\triangle HMC}=S_{\triangle HMN}$,所以$S_{\triangle ABC}=S_{AKNM}$.

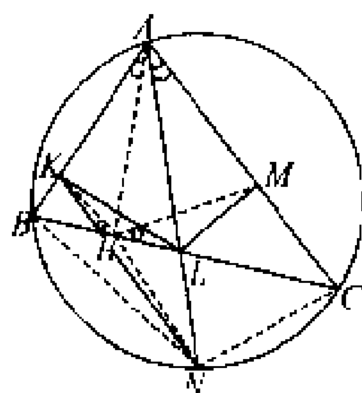


图 19-4

例 3 设A是半径为R的圆O中一点,过A作两条互相垂直的直线,将它们绕A旋转同样的角度α,在旋转过程中两条直线扫过的圆内的区域形成一个以A为中心的"十字架",试求其面积.

解　如图 19－5，设过 A 两直线为 P_1Q_1、R_1S_1，旋转后为 P_2Q_2、R_2S_2，$S_{AP_1P_2}$ 表示 AP_1 到 AP_2 扫过的面积，类似地有 $S_{AQ_1Q_2}$，$S_{AR_1R_2}$，$S_{AS_1S_2}$，则

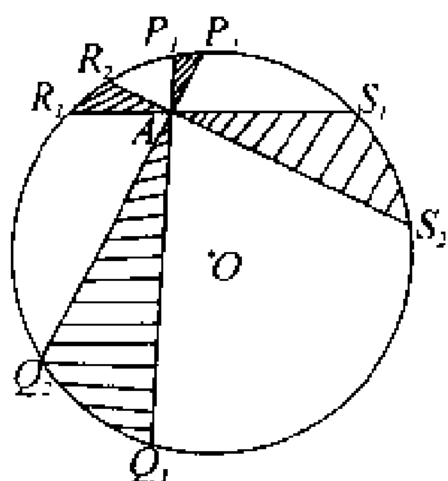


图 19－5

$$S_{AP_1P_2}+S_{AQ_1Q_2}$$
$$=S_{扇形OP_1P_2}+S_{扇形OQ_1Q_2}+S_{\triangle OP_1A}$$
$$+S_{\triangle OQ_2A}-S_{\triangle OQ_1A}-S_{\triangle OAP_2}$$
$$=\alpha R^2+(S_{\triangle OP_1A}-S_{\triangle OQ_1A})$$
$$+(S_{\triangle OQ_2A}-S_{\triangle OP_2A}).\qquad ①$$

同理，有

$$S_{AR_1R_2}+S_{AS_1S_2}$$
$$=\alpha R^2+(S_{\triangle OS_1A}-S_{\triangle OR_1A})+(S_{\triangle OR_2A}-S_{\triangle OS_2A}).\qquad ②$$

设 O 到 P_1Q_1、S_1R_1 距离分别为 d_1，d_2，则因 $P_1Q_1\perp S_1R_1$，故 $S_{\triangle OP_1A}-S_{\triangle OQ_1A}=-d_1d_2$，$S_{\triangle OS_1A}-S_{\triangle OR_1A}=d_1d_2$，故

$$(S_{\triangle OP_1A}-S_{\triangle OQ_1A})+(S_{\triangle OS_1A}-S_{\triangle OR_1A})=0.\qquad ③$$

同理 $$(S_{\triangle OQ_2A}-S_{\triangle OP_2A})+(S_{\triangle OR_2A}-S_{\triangle OS_2A})=0.\qquad ④$$

综合①，②，③，④即得

$$S_{AP_1P_2}+S_{AQ_1Q_2}+S_{AR_1R_2}+S_{AS_1S_2}=2\alpha R^2.$$

即为所求．

例 4　如图 19－6，用斜线标出四个三角形面积相等．证明：没有用斜线标出的三个四边形面积也相等，如果一个三角形的面积等于 1，那么一个四边形的面积是多少？

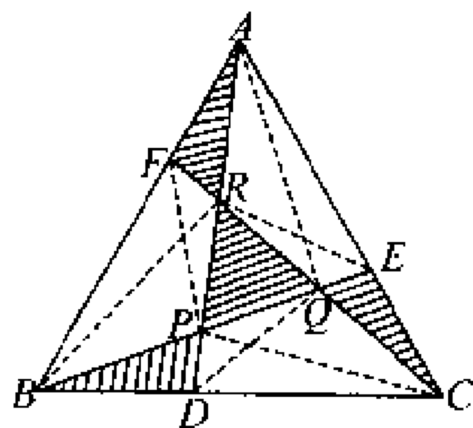


图 19－6

解　连接 AQ、RE、BR、PF、CP、DQ，因 $S_{\triangle ARF}=S_{\triangle PQR}$，故 $S_{\triangle AFP}=S_{\triangle QFP}$，可知

$AQ /\!/ FP$. 同理 $BR /\!/ DQ$, $PC /\!/ RE$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{BD}{DC} &= \frac{RQ}{QC} = \frac{RE}{PC} \\ &= \frac{AR}{AP} = \frac{AQ}{PF + AQ} = \frac{BQ}{BP + BQ} \\ &= \frac{BP + PQ}{2BP + PQ} = \frac{BR + DQ}{2BR + DQ} \\ &= \frac{BC + CD}{2BC + CD} = \frac{2CD + BD}{3CD + 2BD}.\end{aligned} \qquad ①$$

由①可得 $\frac{BD}{DC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 进而可知 $\frac{PQ}{BP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{EP}{PQ} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 故 $EP = BP$.

同理, $\frac{EC}{AE} = \frac{AF}{FB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{CQ}{QF} = \frac{AR}{RD} = 1$.

由上述可知

$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle BCQ}}{S_{\triangle BPD}} &= \frac{BC}{BD} \cdot \frac{BQ}{BP} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 2 + \sqrt{5}.\end{aligned}$$

故当阴影部分的四个三角形面积相等时，四个没有用斜线标出的四边形面积相等，且当 $S_{\triangle BPD} = 1$ 时, $S_{PDCQ} = \sqrt{5} + 1$, 即为所求.

例 5 点 X、Y、Z 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上且 $\triangle XYZ \backsim \triangle ABC$, 在 X、Y、Z 处的角分别等于在 A、B、C 处的角, 求 X、Y、Z 的位置, 使 $\triangle XYZ$ 的面积最小.

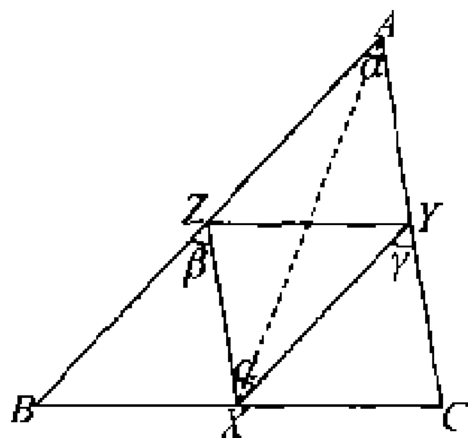


图 19-7

解 如图 19-7, 设 $\angle ZXY = \alpha$, $\angle BZX = \beta$, $\angle XYC = \gamma$, 则 $\angle A = \alpha$. 设 $\triangle XYZ$ 的外接圆半径为 r, $\triangle AZY$ 的外接圆半径为 r_1, 则

$$YZ = 2r_1 \sin A = 2r \sin \angle YXZ,$$

有 $r=r_1$，即$\triangle AZY$与$\triangle XYZ$的外接圆半径相等. 同理，$\triangle BXZ$，$\triangle CYZ$与$\triangle XYZ$的外接圆半径相等，设$\triangle ABC$的外接圆半径为 1，$\triangle XYZ$与$\triangle ABC$的相似比为e，连 AX，易知 $\beta+\gamma=2\alpha$，令 $\beta=\alpha+x$，$\gamma=\alpha-x$，根据正弦定理，$BX=2r\sin\beta$，$XC=2r\sin\gamma$，$BC=2\sin\alpha$，故

$$2\sin\alpha = 2r[\sin(\alpha+x)+\sin(\alpha-x)],$$

即

$$2\sin\alpha = 2e[\sin(\alpha+x)+\sin(\alpha-x)]$$

$$\Leftrightarrow 2e\cos x = 1$$

当 $e=\frac{1}{2\cos x}$取最小值时，$S_{\triangle XYZ}$取最小值，故当 $x=0$ 即 $\alpha=\beta=\gamma$ 时 $S_{\triangle XYZ}$取最小值，此时 x,y,z 分别为$\triangle ABC$各边中点.

例 6 已知正方形和三角形都外切于半径为 1 的圆，证明：正方形和三角形的公共部分的面积必大于 3.4，并问能否肯定这样的面积大于 3.5?

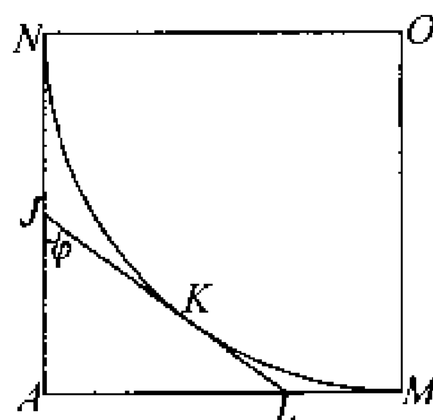


图 19－8

证明 如图 19－8，先考虑 Rt$\triangle ALJ$ 的面积. 设$\angle AJL=\varphi$，$JL=m$，则

$$m+m\sin\varphi+m\cos\varphi=2,$$

可得 $m=\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi+1}$. 易知 $S_{ONJKLM}=m$，故

$$\begin{aligned}S_{\triangle ALJ} &= 1-\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi+1}\\ &= 1-\frac{2}{\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})+1}\\ &\leqslant 1-\frac{2}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2},\end{aligned}$$

当 $\varphi=\frac{\pi}{4}$时取等号.

由于正方形和三角形的公共部分面积 S 不小于外切正方形的面积减去三块上述的如$\triangle ALJ$ 的面积，因此，有

$$S \geqslant 4-3(3-2\sqrt{2})=6\sqrt{2}-5>3.4.$$

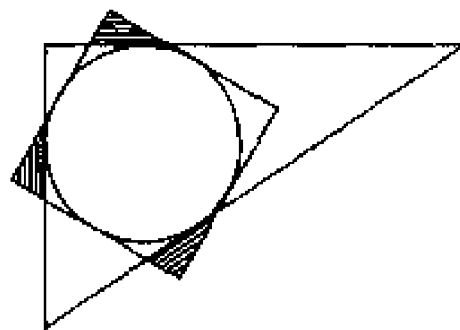


图 19－9

"公共部分"面积 S 未必大于 3.5. 事实上，可以证明存在锐角 φ 使得 $S_{\triangle AIJ}>\frac{1}{2}-2(3-2\sqrt{2})$. 由

$$1-\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi+1}>\frac{1}{2}-2(3-2\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})>\frac{8\sqrt{2}-9}{13-8\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\varphi+\frac{\pi}{4})>\frac{64+11\sqrt{2}}{82},$$

故锐角 φ 存在. 如图 19－9，并使外切三角形的两条边分别与正方形的边成 $\frac{\pi}{4}$ 角，而引第三边时，使截得的三角形的面积 S_φ 满足

$$\frac{1}{2}-2(3-2\sqrt{2})<S_\varphi<3-2\sqrt{2},$$

则

$$S=4-2(3-2\sqrt{2})-S_\varphi$$

$$<4-2(3-2\sqrt{2})-\frac{1}{2}+2(3-2\sqrt{2})=3.5.$$

例 7 如图 19－10 所示，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似且顶点反向排列，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$. 若 A'、B'、C' 到 BC、CA、AB 的距离分别为 l、m、n，求证：

$$l\cdot BC+m\cdot CA+n\cdot AB=2S_{\triangle ABC}.$$

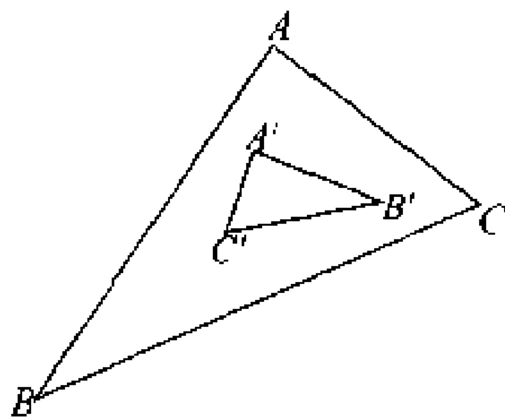


图 19－10

证明 如图 19－11，过 B' 作 AC 平行线，过 C' 作 AB 平行线，两线相交于 D'，$C'D'$ 与 BC 交于 E，则 $\angle BAC=\angle C'D'B'$，又 $\angle BAC=\angle B'A'C'$，故 $\angle C'D'B'=\angle B'A'C'$. 于是 A'、C'、B'、D' 四点共圆，所以 $\angle A'D'C'=\angle A'B'C'=\angle ABC=\angle D'EC$，有 $A'D' /\!/ BC$. 于是

$$l\cdot BC+m\cdot CA+n\cdot AB$$

$= 2 \cdot S_{\triangle A'BC} + 2 \cdot S_{\triangle AB'C} + 2 \cdot S_{\triangle ABC'}$

$= 2 \cdot S_{\triangle D'BC} + 2 \cdot S_{\triangle AD'C} + 2 \cdot S_{\triangle ABD'}$

$= 2 \cdot S_{\triangle ABC}$.

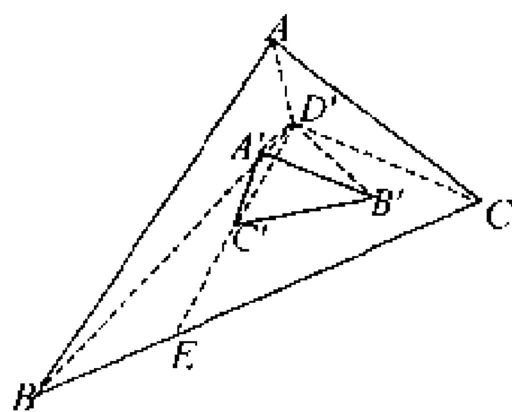


图 19-11

例 8 证明：同时等分三角形的面积与周长的所有直线相交于一点.

证明 如图 19-12，设直线 l 交 $\triangle ABC$ 于 P、Q，PQ 等分 $\triangle ABC$ 的周长 $2p$、面积 S，设 $\triangle ABC$ 内切圆圆心为 I，半径为 r，则

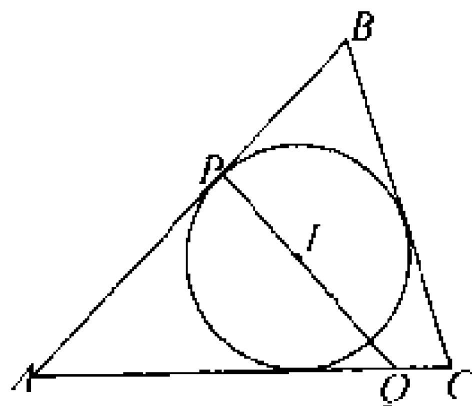


图 19-12

$$\begin{aligned} & S_{\triangle IPA} + S_{\triangle IQA} \\ = & \frac{1}{2} r \cdot AP + \frac{1}{2} r \cdot AQ \\ = & \frac{1}{2} r(AP + AQ) = \frac{1}{2} r \cdot p \\ = & \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

又 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$，显见 I 在 PQ 上，即直线 l 过 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心. 注意到直线 l 的任意性，命题成立.

例 9 已知锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上，求证：AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高的充要条件是 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} R(EF + FD + DE)$.

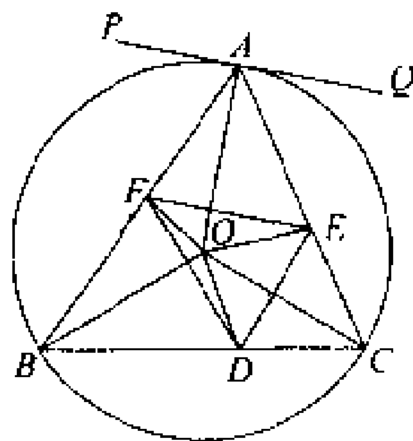


图 19-13

证明 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，连接 OA、OB、OC、OD、OE、OF.

先证必要性. 因 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，故 O 在 $\triangle ABC$ 内，于是

$$S_{\triangle ABC} = S_{OEAF} + S_{OFBD} + S_{ODCE}.$$

如图 19-13，过 A 作 $\odot O$ 切线 PQ，则 $OA \perp PQ$，$\angle PAB = \angle ACB$，又

B、C、E、F 四点共圆，所以$\angle ACB = \angle AFE$，$\angle PAB = \angle AFE$，可知 $PQ /\!/ EF$.所以 $OA \perp EF$.进而，可知

$$S_{OEAF} = \frac{1}{2} OA \cdot EF.$$

同理 $$S_{OFBD} = \frac{1}{2} OB \cdot FD, S_{ODCE} = \frac{1}{2} OC \cdot DE.$$

从而，有 $$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(OA \cdot EF + OB \cdot FD + OC \cdot DE)$$

$$= \frac{R}{2}(EF + FD + DE).$$

以下证充分性.先证 $OA \perp EF$.若 OA 不垂直 EF，则

$$S_{OEAF} < \frac{1}{2} OA \cdot EF,$$

又 $$S_{OFBD} \leqslant \frac{1}{2} OB \cdot FD,$$

$$S_{ODCE} \leqslant \frac{1}{2} OC \cdot DE,$$

则 $$S_{\triangle ABC} < \frac{R}{2}(EF + FD + DE),$$

这与 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{R}{2}(EF + FD + DE)$相矛盾，故 $OA \perp EF$.同理 $OB \perp FD$，$OC \perp DE$.过 A 作$\odot O$ 的切线PQ，则 $OA \perp PQ$，故 $PQ /\!/ EF$.于是$\angle AFE = \angle PAF = \angle ACB$，可知 B、C、E、F 四点共圆.同理 A、B、D、E 四点共圆，C、A、F、D 四点共圆，所以$\angle ADB = \angle AEB$，$\angle ADC = \angle AFC$，则

$$\angle AEB + \angle AFC = 180°,$$

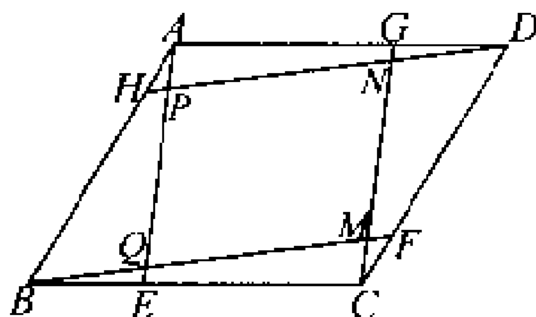
又$\angle AEB = \angle AFC$，故$\angle AEB = \angle AFC = 90°$，$\angle ADC = \angle AFC = 90°$，即 $AD \perp BC$，$BE \perp CA$，$CF \perp AB$.

练 习 十 九

一、填空题

1. 已知正方形 $ABCD$ 的顶点 A 位于边长为 1 的正方形 $A'B'C'D'$ 的中心，而 AB 把 $B'C'$ 分为两部分，且 $AB\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，这两个正方形共同部分的面积是______.

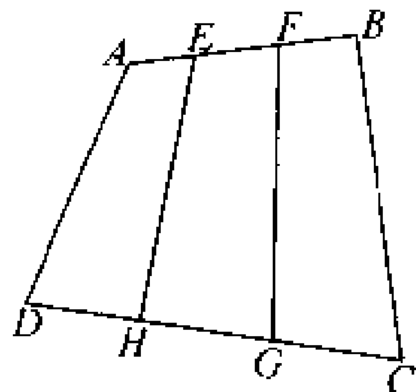
2. 如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别为 BC、CD、DA、AB 上的点 AE、BF、CG、DH 围成四边形 $PQMN$，设 $\frac{AH}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{AD}=\frac{1}{3}$，且 $S_{\triangle AHP}=1$，则 $S_{四边形PQMN}=$______.



(第 2 题)

3. ▱$ABCD$ 的面积为 1，E、F 分别是 AB，BC 的中点，AF 与 CE、DE 分别相交于 G、H，则△EGH 的面积等于______.

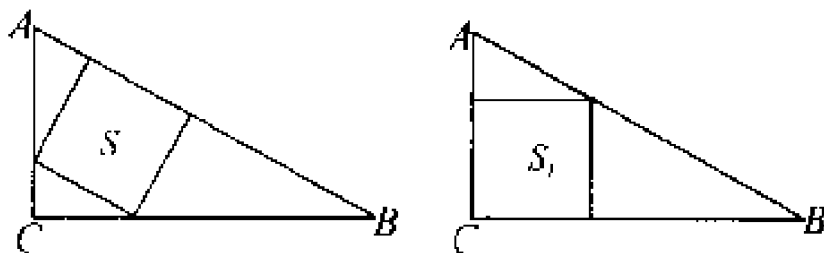
4. 如图所示，E、F、G、H 分别为四边形 $ABCD$ 的 AB 和 CD 的三等分点，则 $\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}}=$______.



(第 4 题)

二、解答题

5. 如图所示，S_1 和 S_2 是 Rt△ABC 的两个内接正方形．若 S_1 的面积为 441，S_2 的面积为 440，求 $AC+CB$ 的值.



(第 5 题)

6. 矩形的两条平行边的长度等于 1cm，此外，已知这个矩形由两条相互垂直的直线分成 4 个矩形，其中 3 个的面积不小于 1cm^2，而第 4 个不小于 2cm^2，问：矩形的另外两条边至少多长时才能做到这一点？

7. 在锐角$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 成等差数列，考虑点 P 的集合构成的区域：

$$G=\{P \mid PB \leqslant PA, PB \leqslant PC, P \in \triangle ABC\},$$

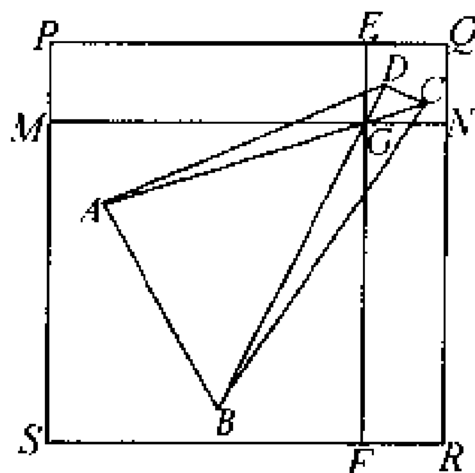
若 G 的面积记作 S，且 $S=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，试判定$\triangle ABC$的形状.

8. 圆外切四边形 $ABCD$ 的四边长分别为 a、b、c、d，$S_{ABCD}=\sqrt{abcd}$，求证：A、B、C、D 四点共圆.

9. 在锐角三角形中，由各边的中点向其他两边引垂线，证明：由这些垂线所围成的六边形的面积等于原三角形面积的一半.

10. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高，以 AC、BD 为直径作圆交$\triangle ABC$ 内一点 P，求证：$S_{\triangle PCB}=S_{\triangle PAD}$.

11. 正方形 $PQRS$ 的边长为 1，$MN \parallel PQ$，$EF \parallel PS$，且 MN 与 EF 交于 G，凸四边形 $ABCD$ 的顶点 A、B 在矩形 $MGFS$ 内，顶点 C、D 在矩形 $EQNG$ 内，其对角线交点是 G(如图所示)，求 S_{ABCD}的最大值.



(第 11 题)

12. 在一个边长为 1 的正方形的所有内接正三角形中找出一个面积最大的和一个面积最小的，并求两个面积.

13. 已知 A、C 分别是▱$PQRS$ 的边 PS、QR 上的点，AQ 与 CP 交于 B，AR 与 CS 交于 D，$S_{PQRS}=1$，求 S_{ABCD}的最大值.

第二十讲　几个重要的几何定理

知识点和方法述要

1. (1)梅涅劳斯定理　设 X、Y、Z 分别是△ABC 的 BC, CA, AB 边或其延长 BC, CA, AB 边或其延长线上的点,其中有奇数个点在边的延长线上,则 X、Y、Z 三点共线的充要条件是

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1 \quad ①$$

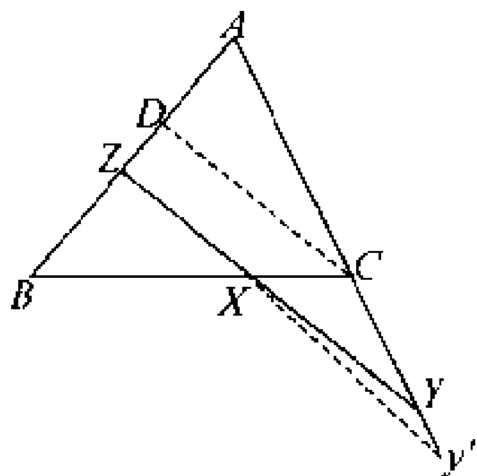


图 20-1

证明　如图 20-1,不妨设 X、Y、Z 中的一点 Y 在边 AC 的延长线上.若 X、Y、Z 三点共线,过 C 引 $CD\,/\!/\,YZ$ 交 AB 于 D,则

$$\frac{BX}{XC}=\frac{BZ}{ZD},\frac{CY}{YA}=\frac{DZ}{ZA},$$

所以$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{BZ}{ZD}\cdot\frac{DZ}{ZA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$.

反之,若①成立,设直线 ZX 与 AC 的延长线交于 Y',即 X、Y'、Z 三点共线,则由上面的证明有

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY'}{Y'A}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

与①比较,可得$\frac{CY'}{Y'A}=\frac{CY}{YA}$,即 Y 与 Y' 重合,故 X、Y'、Z 三点共线.

(2)“X、Y、Z 三点中有奇数个点在边的延长线上”这一条件十分必要,否则梅涅劳斯定理不成立.

(3) 梅涅劳斯定理是证明三点共线的有力工具.

2. (1)塞瓦定理　设 X、Y、Z 分别是△ABC 的 BC、CA、AB 边或其延长线上的点,其中有偶数个点在边的延长线上,则 AX、BY、CZ

三线共点或互相平行的充要条件是

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

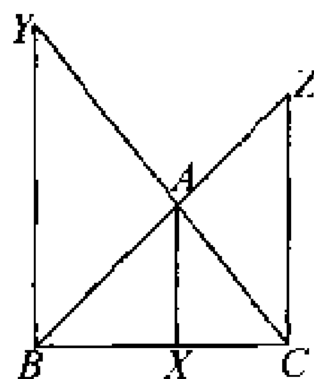


图 20-2

证明　若 $AX /\!/ BY /\!/ CZ$(图 20－2),则$\frac{BX}{XC} = \frac{BA}{AZ}, \frac{CY}{YA} = \frac{ZB}{BA}$,所以

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

若 AX、BY、CZ 共点于 O(图 20－3),COZ 是截$\triangle ABX$ 的直线,BOY 是截$\triangle ABX$ 的直线,根据梅涅劳斯定理,有

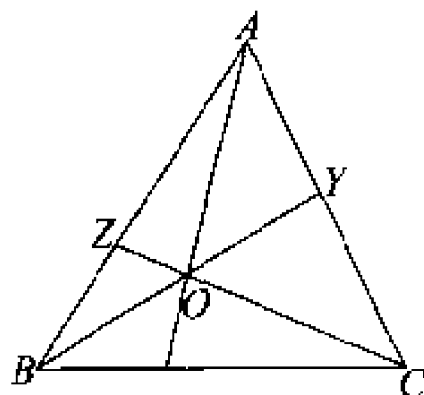


图 20-3

$$\frac{BC}{CX} \cdot \frac{XO}{OA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1, \qquad ①$$

$$\frac{XB}{BC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AO}{OX} = 1, \qquad ②$$

①,②相乘得,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

必要性获证.

充分性证明可类似梅涅劳斯定理的证明. 这里从略.

(2)"X、Y、Z 三点中有偶数个点在边的延长线上"这一条十分必要,否则塞瓦定理不成立.

(3) 塞瓦定理常用于证明三线共点.

3. 托勒密定理　设四边形 $ABCD$ 内接于一圆,则 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

证明　如图 20-4,在对角线 BD 上取点 E,使得$\angle BAE = \angle CAD$,又$\angle ABE = \angle ACD$,故$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$. 从而有$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$,即

$$AB \cdot CD = AC \cdot BE. \qquad ①$$

另一方面,$\angle EAD = \angle BAC$,又$\angle ADE = \angle ACB$,所$\triangle ADE \backsim$

$\triangle ABC$,从而有

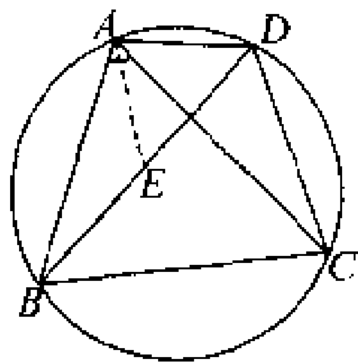


图 20-4

$$\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC},$$

即 $$AD\cdot BC=AC\cdot ED.$$

①,②相加可得

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD.$$

更一般地,托勒密定理可作如下的推广:

在凸四边形 $ABCD$ 中,有

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD$$

当且仅当 $ABCD$ 是圆内接四边形时等号成立.(见第二十一讲).

4. 西姆松定理　在凸四边形 $ABPC$ 中,若 X、Y、Z 分别是 P 点在$\triangle ABC$ 的 BC、CA、AB 边或其延长线上的射影,则 X、Y、Z 三点共线的充要条件是四边形 $ABPC$ 内接于一圆.

证明　如图 20-5,若 X、Y、Z 三点共线,连结 BP,CP,则因 $PX\perp BC$,$PY\perp AC$,$PZ\perp AC$,$PZ\perp AB$,有 B、P、X、Z 和 Y、P、X、C 分别四点共圆,有

$$\angle PBZ=180^\circ-\angle PXZ=\angle PXY=\angle PCY.$$

故 A、B、P、C 四点共圆.

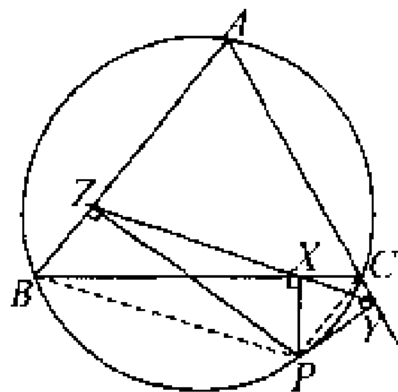


图 20-5

若 A、B、P、C 四点共圆,则 $\angle PBZ=\angle PCY$.因 $PX\perp BC$,$PY\perp AC$,$PC\perp AB$,有 B、P、X、Z 和 Y、P、X、C 四点共圆,有

$$\angle PBZ=180^\circ-\angle PXZ=\angle PXY=\angle PCY,$$

故 X、Y、Z 三点共线.

若四边形 $ABPC$ 内接于一圆,则直线 ZXY 称为$\triangle ABC$ 的关于 P 点的西姆松线.

5. 欧拉线及欧拉公式

(1) 欧拉定理　设$\triangle ABC$ 的外心、重心、垂心分别是 O、G、H,则

O、G、H 三点共线且 $OG=\frac{1}{2}GH$.

我们称 O、G、H 的连线为欧拉线.

证明　如图 20－6，延长 AH、AG 分别交 BC 于 D、M，则 $AD\perp BC$，M 为 BD 中点. 连接 OM，则 $OM\perp BC$，有 $OM/\!/AD$. 为了证明 O、G、H 共线，只须证明 $AH=2OM$，为此，延长 CO 交外接圆于 P，连接 PB、PA. 由于 CP 为直径，所以 $PB/\!/AD$，$PA/\!/BE$. 故四边形 $PBHA$ 为平行四边形，$PB=AH$，又 $OM=\frac{1}{2}PB$，所以 $OM=\frac{1}{2}AH$，OH 分 AM 为 2:1 的两部分，即 OH 必过重心 G 且 $OG=\frac{1}{2}GH$.

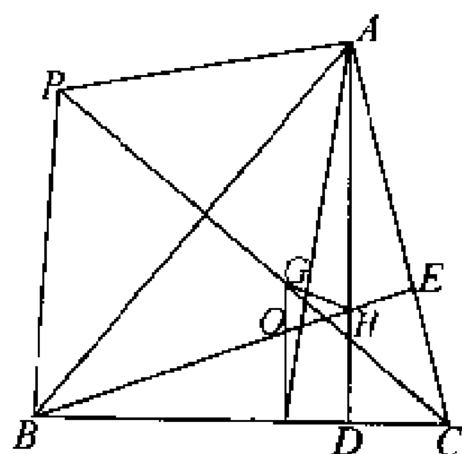


图 20-6

(2) 欧拉公式　设三角形的外接圆和内切圆半径分别为 R 和 r，则两圆的圆心距为 $d=\sqrt{R(R-2r)}$.

证明　如图 20-7，设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，内心为 I，AI 延长线交外接圆于 L，则 L 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，连 LO 延长交外接圆于 M，过 I 作 $ID\perp AB$，D 为垂足，则 $ID=r$，易证 $\text{Rt}\triangle ADI\backsim\triangle MBL$，故 $\frac{ID}{BL}=\frac{AI}{ML}$，即 $ID\cdot ML=AI\cdot BL$. 所以 $2Rr=AI\cdot BL$. 又连接 BI，因

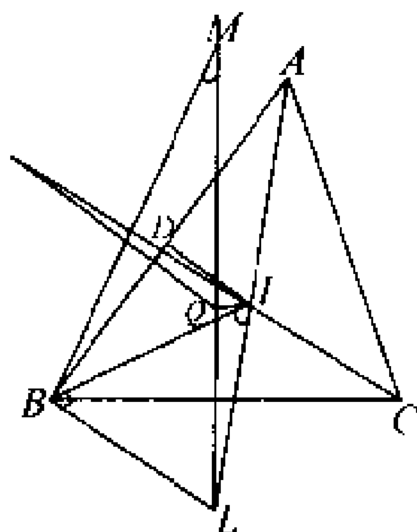


图 20-7

$$\angle BIL=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\angle IBL=\frac{1}{2}\angle ABC+\angle CBL$$

$$=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle A,$$

所以$\angle BIL=\angle IBL$，有$BL=IL$，于是$AI\cdot IL=2Rr$. 又将OI延长交外接圆于P、Q两点，则

$$PI\cdot QI=AI\cdot IL=2Rr,$$

所以
$$(R+d)(R-d)=2Rr,$$

即
$$d=\sqrt{R(R-2r)}.$$

由欧拉公式可知$R\geqslant 2r$，即三角形外接圆半径不小于其内切圆直径.

例 题 精 讲

例 1 如图20-8，过$\triangle ABC$的三个顶点A、B、C作它的外接圆切线，分别和BC、CA、AB的延长线交于P、Q、R，求证：P、Q、R三点共线.

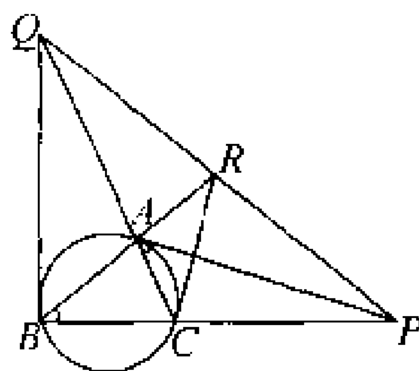


图 20-8

证明 根据梅涅劳斯定理，只需证明

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1.$$

因AP是圆的切线，因而$\triangle BPA\backsim\triangle APC$，从而

$$\frac{BP}{PC}=\frac{S_{\triangle BPA}}{S_{\triangle APC}}=\frac{AB^2}{AC^2}.$$

同理$\frac{CQ}{QA}=\frac{BC^2}{AB^2}$，$\frac{AR}{RB}=\frac{AC^2}{BC^2}$，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$，故$P$、$Q$、$R$三点共线.

例 2 设四边形$ABCD$外切于一圆，E、F、G、H分别是AB、BC、CD、DA边上的切点，若直线HE与GF相交于N点，则直线BD必通过点M.

证明 如图20-9，设HE与DB的交点M'，则HEM'是截$\triangle ABD$的直线，根据梅涅劳斯定理有

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BM'}{M'D}\cdot\frac{DH}{HA}=1. \qquad ①$$

又设GF与DB的交点为M''，则GFM''是截$\triangle CBD$的直线，所以

$$\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DM''}{M''B}\cdot\frac{BF}{FC}=1.\quad ②$$

但 $HA=AE$, $EB=BF$, $FC=CG$, $GD=DH$,比较①②得 $\frac{BM'}{MD'}=\frac{BM''}{MD''}$,即 M'、M'' 重合,故 HE、GF 交于 DB 上的同一点 M.

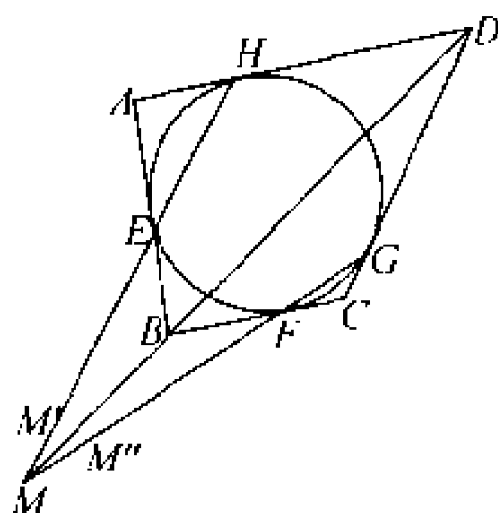


图 20-9

例 3 在四边形 $ABCD$ 中,$\triangle ABD$、$\triangle BCD$ 和 $\triangle ABC$ 的面积之比为 3:4:1,点 M、N 分别在 AC、CD 上,满足 $AM:AC=CN:CD$,并且 B、M、N 三点共线(图 20-10),求证:M、N 分别是 AC 和 CD 的中点.

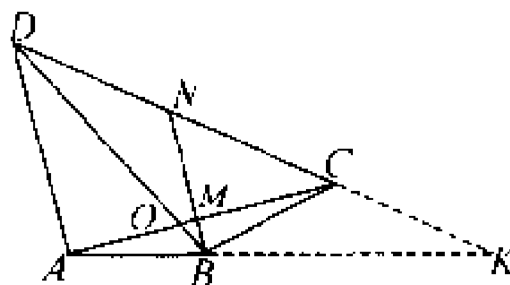


图 20-10

证明 设 AC 与 BD 交于 O,AB 与 DC 的延长线交于 K,因

$$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}=3:4:1,$$

所以 $\frac{OA}{OC}=\frac{3}{4}$,$\frac{OB}{OD}=\frac{1}{6}$,由于 ABK 是截 $\triangle COD$ 的直线,所以根据梅涅劳斯定理,有

$$\frac{OB}{BD}\cdot\frac{DK}{KG}\cdot\frac{CA}{AO}=1,$$

即

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{DK}{KC}\cdot\frac{7}{3}=1.$$

所以 $\frac{DK}{KC}=3$.

令 $S_{\triangle ABC}=1$,则 $S_{\triangle ADC}=6$,因而 $S_{\triangle AKC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ADC}=3$,即 $AK=3AB$.又 BMN 是截 $\triangle AKC$ 的直线,根据梅涅劳斯定理,有

$$\frac{AB}{BK}\cdot\frac{KN}{NC}\cdot\frac{CM}{MA}=1.\quad ①$$

依题设,$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}$,进而有 $\frac{AM}{MC}=\frac{CN}{ND}$,代入①得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{KM}{NC}\cdot\frac{ND}{NC}=1.\qquad ②$$

设 $KC=1,NC=x$,则 $KN=1+x,ND=2-x$,代入②得

$$\frac{1+x}{x}\cdot\frac{2-x}{x}=2,$$

解得 $x_1=1,x_2=-\frac{2}{3}$(舍去).

由 $x_1=1$ 得 $DN=DC-NC=2-1=1=NC$,N 是 DC 的中点.又 $\frac{AM}{MC}=\frac{CN}{ND}=1$,所以 M 为 AC 的中点.

例 4 设 A'、B'、C' 分别为△ABC 三边 BC、CA、AB 的中点,P 为△$A'B'C'$ 内一点,$A'P$、$B'P$、$C'P$ 分别交 $B'C'$,$C'A'$,$A'B'$ 于 L、M、N(图 20-11).

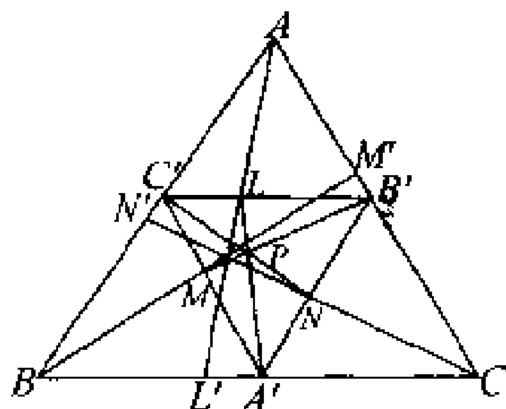


图 20-11

求证:AL、BM、CN 三线共点.

证明 根据塞瓦定理,有

$$\frac{B'L}{LC'}\cdot\frac{C'M}{MA'}\cdot\frac{A'N}{NB'}=1.$$

设 AL、BN、CN 分别交 BC、CA、AB 于点 L'、M'、N'.因 B'、C' 分别为 AC、AB 的中点,所以 $B'C'/\!/BC$,有 $\frac{BL'}{L'C}=\frac{C'L}{LB'}$.同理 $\frac{CM'}{M'A}=\frac{A'M}{MC'}$,$\frac{AN'}{N'B}=\frac{B'N}{NA'}$,于是 $\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM'}{M'A}\cdot\frac{AN'}{N'B}=\frac{C'L}{LB'}\cdot\frac{A'M}{MC'}\cdot\frac{B'N}{NA'}=1$.根据塞瓦定理的逆定理,$AL'$、$BM'$、$CN'$ 三线共点,即 AL、BM、CN 三线共点.

例 5 设 AD 是△ABC 的高,且 D 在 BC 边上,若 P 是 AD 上任意一点,BP、CP 分别与 AC、AB 交于 E 和 F(图 20-12),则 $\angle EDA=\angle FDA$.

分析 过 A 作 AD 的垂线,与 DE、DF 的延长线分别交于 M、N.欲证 $\angle EDA=\angle FDA$,可转化为证明 $AM=AN$.因 $AD\perp BC$,故 $MN/\!/$

BC,可得$\triangle AME \backsim \triangle CDE$,$\triangle ANF \backsim \triangle BDF$,从而有$\frac{AM}{CD}=\frac{AE}{CE}$,$\frac{AN}{BD}=\frac{AF}{BF}$,于是,有

$$AM=\frac{AE\cdot CD}{CE}, \quad ①$$

$$AN=\frac{AF\cdot BD}{BF}, \quad ②$$

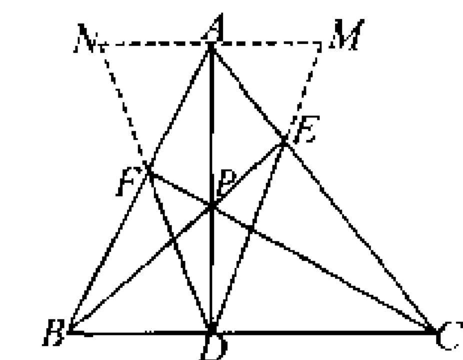


图 20-12

注意到 AD、BE、CF 共点于 P,根据塞瓦定理,可得

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1,$$

即有
$$\frac{AE\cdot CD}{CE}=\frac{AF\cdot BD}{BF}. \quad ③$$

由①、②、③得 $AM=AN$.

例 6 设$\triangle ABC$ 的三条高为 AD、BE、CF,过 D 作 AB、BE、CF、AC 的垂线,垂足分别为 P、Q、R、S,求证:P、Q、R、S 在同一直线上.

分析 要证四点共线,可先证三点共线,图中有多组四点共圆,再考虑到从 D 点所引的四条垂线,容易联想到西姆松定理.

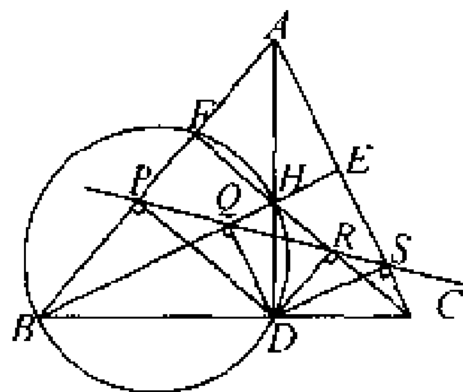


图 20-13

如图 20-13,$\triangle ABC$ 的垂心为 H,则 B、D、H、F 四点共圆.考察圆内接$\triangle FBH$,D 为其外接圆上一点,DP、DQ、DR 分别与$\triangle FBH$ 三边所在直线垂直,根据西姆松定理,P、Q、R 三点共线,同理可证 Q、R、S 三点共线.所以,P、Q、R、S 四点共线.

例 7 由$\triangle ABC$ 外接圆的弧 BC 上一点 P 分别向边 BC、AC 与 AB 作垂线 PK、PL 和 PN,求证:$\frac{BC}{PK}=\frac{AC}{PL}+\frac{AB}{PM}$.

证明 连 PA、PB、PC,(如图 20-14),由托勒密定理可知

$$BC \cdot AP = AC \cdot BP + AB \cdot CP,$$

即 $\dfrac{BC}{PK} \cdot AP \cdot PK$

$$= \frac{AC}{PL} \cdot BP \cdot PL + \frac{AB}{PM} \cdot CP \cdot PM. \quad ①$$

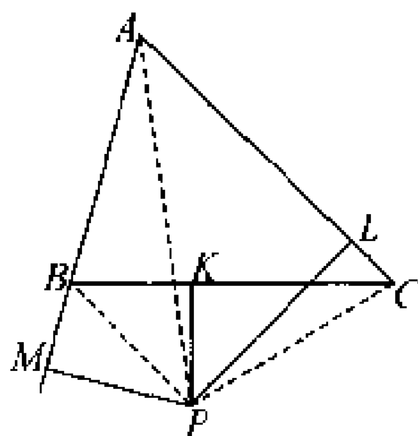


图 20-14

由 $\angle KBP = \angle LAP$ 可知 Rt$\triangle KBP \backsim$ Rt$\triangle LAP$,故

$$\frac{PK}{PL} = \frac{PB}{PA},$$

即 $$AP \cdot PK = BP2 \cdot PL.$$

同理 $$BP \cdot PL = CP \cdot PM. \quad ③$$

由①,②,③即得

$$\frac{BC}{PK} = \frac{AC}{PL} + \frac{AB}{PM}.$$

例 8 设$\triangle ABC$ 的外接圆 O 和一旁切圆 I_1 的一个交点为 Q,连 I_1Q,并延长交$\odot O$ 于 P(图 20-15).求证:I_1P 的长度等于$\odot O$ 的直径.

证明 设$\odot O$ 的半径为R,$\odot I_1$ 的半径为 r_1,根据欧拉公式,有

$$OI_1^2 = R^2 + 2Rr_1. \quad ①$$

又易知 $$I_1Q \cdot I_1P = OI_1^2 - R^2, \quad ②$$

由①、②可得

$$r_1 I_1 P = R^2 + 2Rr_1 - R^2.$$

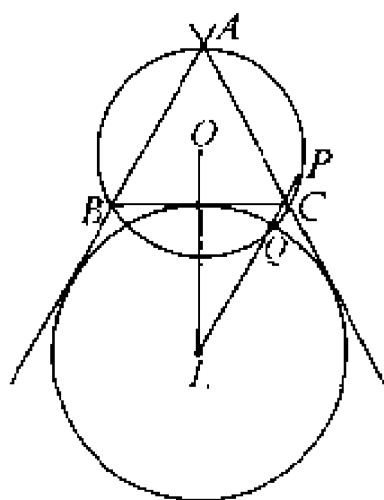


图 20-15

化简即得 $I_1P = 2R$.

例 9 设四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为$\odot O$ 的内接四边形,H_1、H_2、H_3、H_4,分别为$\triangle A_2A_3A_4$,$\triangle A_1A_3A_4$,$\triangle A_1A_2A_4$,$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心.求证:H_1、H_2、H_3、H_4 四点共圆.并定出该圆的圆心.

分析 由于四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 是圆内接四边形,故$\triangle A_2A_3A_4$、

$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 外心都为 O，根据欧拉定理，上述四个三角形的重心 G_1、G_2、G_3、G_4 分别在 OH_1、OH_2、OH_3、OH_4 上，且 $OG_i=\frac{1}{3}OH_i(i=1,2,3,4)$，有 $G_iG_{i+1}\underline{\underline{//}}\frac{1}{3}H_iH_{i+1}(i=1,2,3,4)(G_5=G_1,H_5=H_1)$. 四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 与四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 相似.

一个有益的想法先考察四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 与四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的关系，在图 20-16 中，设 M 为 A_3A_4 中点，$\frac{A_2G_1}{G_1M}=\frac{A_1G_2}{G_2M}=2$，所以 $G_1G_2\underline{\underline{//}}\frac{1}{3}A_1A_2$，同理 $G_2G_3\underline{\underline{//}}\frac{1}{3}A_2B_3$，$G_3G_4\underline{\underline{//}}\frac{1}{3}A_3A_4$，$G_4G_1\underline{\underline{//}}\frac{1}{3}A_4A_1$，故四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 与四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 相似，相似比为 1:3.

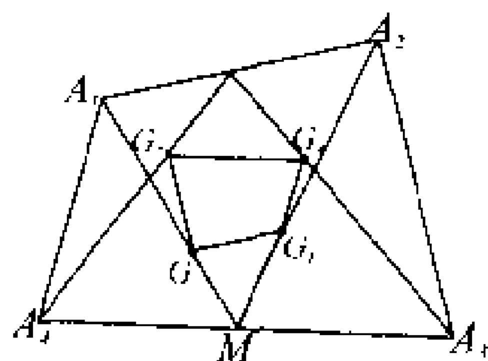


图 20-16

如图 20-17，由上述知，四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 与四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 全等，所以四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 也为圆内接四边形.

由以上分析可知，$A_1A_2\underline{\underline{//}}H_1H_2$. 所以四边形 $A_1A_2H_1H_2$ 为平行四边形. 设 P 为 A_1H_1 和 A_2H_2 的中点，同理，$A_2A_3H_2H_3$ 也是平行四边形，所以 A_2H_2 的中点 P 也为 A_3H_3 的中点，还为 A_4H_4 的中点，所以四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 和四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 关于 P 点中心对称，O 点关于 P 点的对称点 O' 即为四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 的外心.

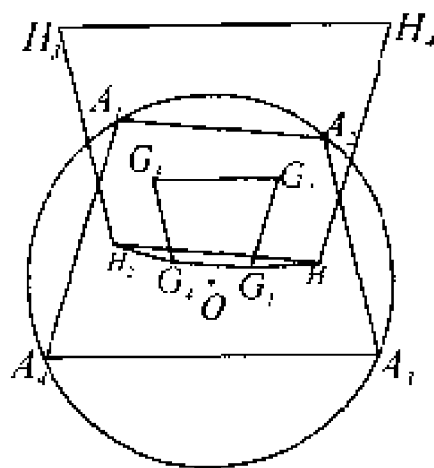
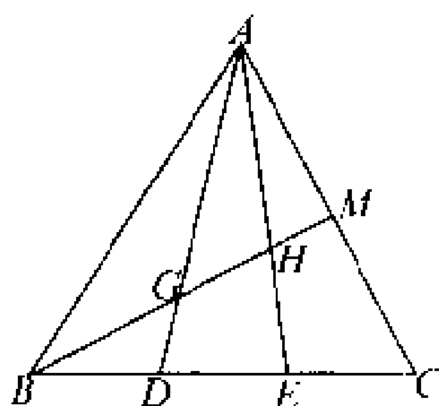


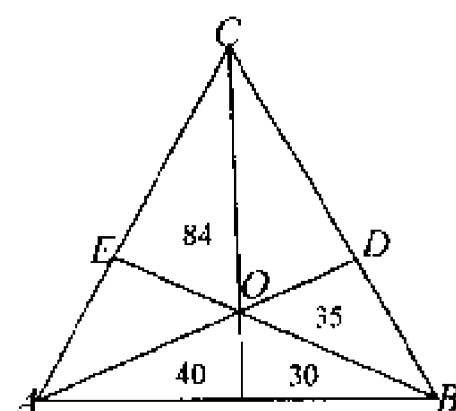
图 20-17

练习二十

一、填空题



（第 1 题）



（第 2 题）

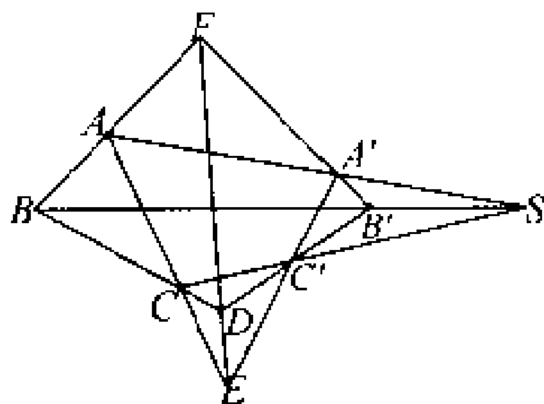
1. 如图，在△ABC 中，D、E 是 BC 上的三等分点，M 是 AC 的中点，BM 交 AD 于 G，交 AE 于 H，则 $BG:GH:HN$ 等于______.

2. 如图，△ABC 被通过它的三个顶点与一个内点的三条直线分为六个小的三角形，其中四个小三角形的面积在图中标出，则 $S_{\triangle ABC}=$______.

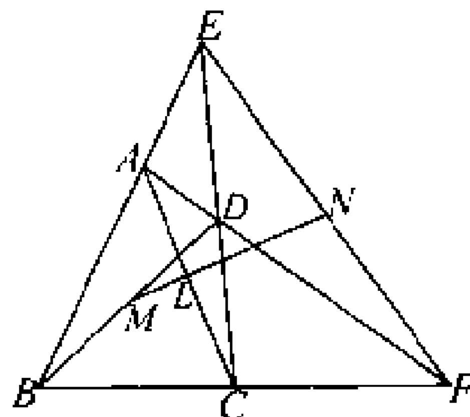
二、解答题

3. 一条直线与三角形三边或其延长线交于 L、M、N 三点，若 L'、M'、N' 点与 L、M、N 点关于三边的中点对称，求证：L'、M'、N' 三点也共线.

4. 如图，设△ABC 和△$A'B'C'$ 的对应顶点连线 AA'、BB'、CC' 交于一点 S，证明：如果对应边 BC 和 $B'C'$，CA 和 $C'A'$，AB 和 $A'B'$ 或它们的延长线相交，则它们的交点 D、E、F 在同一直线上.



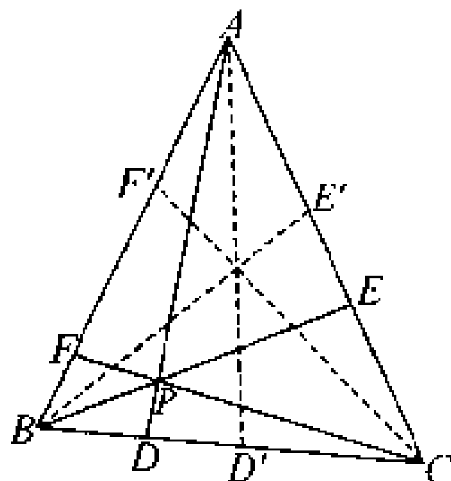
（第 4 题）



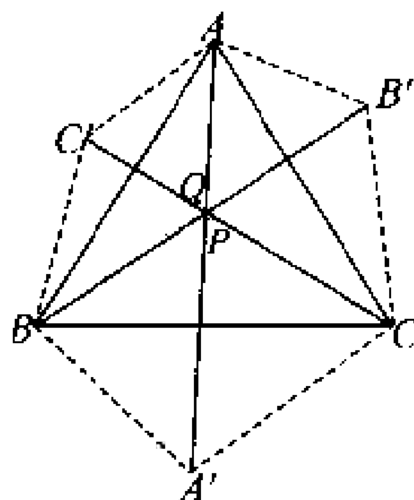
（第 5 题）

5. 设四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB 和 CD 的延长线交于点 E，另一组对边 AD 和 BC 的延长线交于 F，AC 中点 L，BD 中点 M 及 EF 中点 N，求证：L、M、N 三点共线.（如图）

6. 如图，设 P 是△ABC 内一点，AP、BP、CP 分别与边 BC、CA、AB 交于点 D、E、F，过 D、E、F 三点作圆与三边又交于 D'、E'、F'. 求证：AD'，BE'，CF' 三线交于一点.



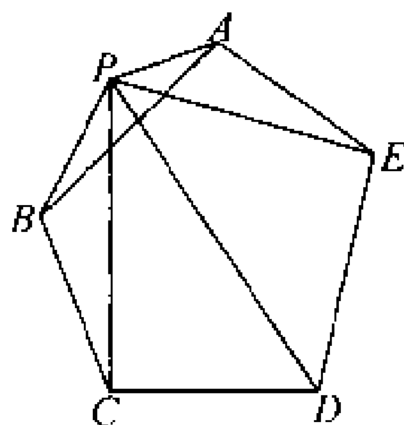
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，在正△ABC 内任取一点 O，设点 O 关于三边 BC、CA、AB 的对称点分别为 A'、B'、C'，求证：AA'，BB'，CC' 交于一点 P.

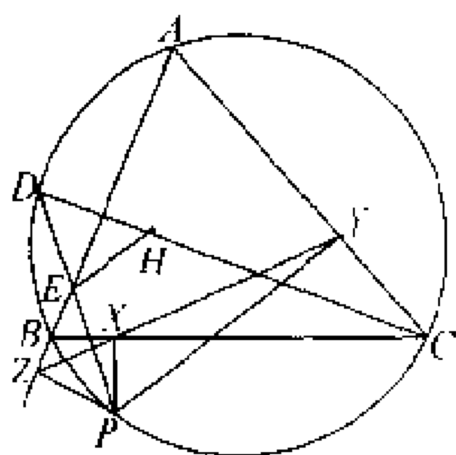
8. 如图，已知圆内正五边形 $ABCDE$，若 P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点，求证：$PA+PD+PB=PE+PC$.



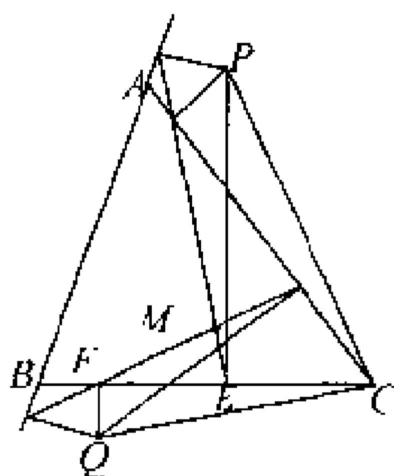
（第 8 题）

9. 从锐角△ABC 的外心 O，向它的边 BC、CA、AB 作垂线，垂足分别为 D、E、F，设△ABC 的外接圆和内切圆半径分别为 R、r，求证：$OD+OE+OF=R+r$.

10. 如图，设△ABC 的垂心 H，延长 CH 和外接圆的交点为 D，在外接圆的 $\overset{\frown}{BC}$ 上取一点 P，若 PD 和 AB 的交点为 E，求证：HE 平行于关于点 P 的西姆松线.



(第 10 题)

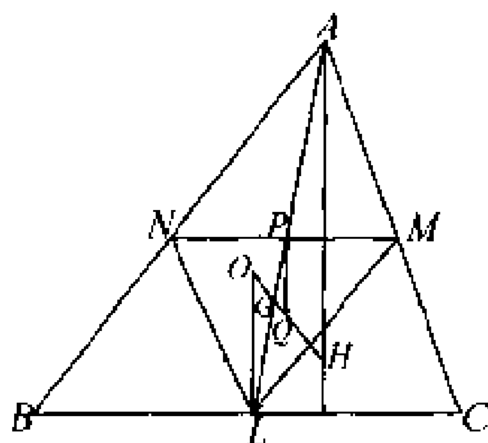


(第 11 题)

11. 如图,设 P、Q 为△ABC 外接圆上的两点,求证:若△ABC 关于 P、Q 的西姆松线 DE 和 FG 交于 M,则 $\angle FME=\angle PCQ$.

12. 设△ABC 的垂心为 H,其外接圆上任意一点 P,求证:△ABC 关于 P 点的西姆松线过线段 PH 的中点.

13. 如图,设 L、M、N 为△ABC 的三边的中点,求证:△LMN 的外心在△ABC 的欧拉线上.



(第 13 题)

14. 设△ABC 的外接圆半径 $R=1$,内切圆半径为 r,它的垂足三角形 $A'B'C'$ 的内切圆半径为 P,求证:

$$P\leqslant 1-\frac{1}{3}(1+r)^2.$$

第二十一讲　几何不等式

知识点和方法述要

1. 重要不等式

(1) 推广的托勒密定理　四边形的对边乘积之和不小于对角线之乘积.

在几何不等式论证中推广的托勒密定理也是一个重要的基本不等式.(证明见第二十二讲例 5)

(2) 艾尔多斯——莫迪尔不等式

设 P 为$\triangle ABC$ 内部或边界上一点，P 到三边距离分别为 PD、PE、PF，则 $PA+PB+PC\geqslant 2(PD+PE+PF)$.

证明　设 $PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，$PD=p$，$PE=q$，$PF=r$，如图 21-1 所示，C,D,P,E 四点共圆，有

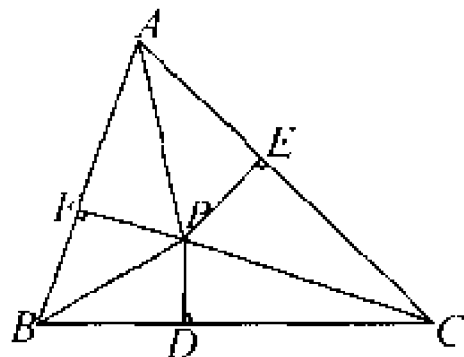


图 21-1

$$DE=\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos C}$$
$$=\sqrt{(p\sin B+q\sin A)^2+(p\cos B-q\cos A)^2}$$
$$\geqslant p\sin B+q\sin A.$$

从而
$$z=\frac{DE}{\sin C}\geqslant\frac{p\sin B+q\sin A}{\sin C}.$$

同理
$$x\geqslant\frac{r\sin B+q\sin C}{\sin A};$$
$$y\geqslant\frac{r\sin A+p\sin C}{\sin B}.$$

于是，有

$$x+y+z\geqslant\frac{r\sin B+q\sin C}{\sin A}+\frac{r\sin A+p\sin C}{\sin B}$$

$$+\frac{p\sin B+q\sin A}{\sin C}$$

$$=p\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)+q\left(\frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}\right)$$

$$+r\left(\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\right)\geqslant 2(p+q+r).$$

易知等号当且仅当$\triangle ABC$为正三角形且P为$\triangle ABC$中心时取得.

(3)(ⅰ)底边和顶角一定的所有三角形中,等腰三角形面积最大,周长最大;

(ⅱ)底边和周长一定的所有三角形中,等腰三角形面积最大;

(ⅲ)内接于定圆的所有n边形中,以正n边形面积最大;

(ⅳ)周长一定的所有n边形中,正n边形面积最大;

(ⅴ)周长一定的平面闭曲线中,圆所围成的面积最大.

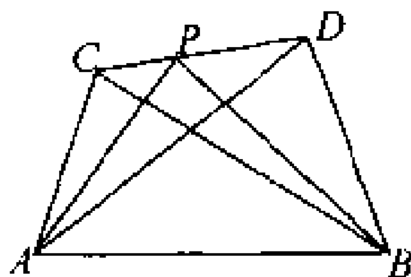


图 21-2

(4) 如图 21－2, $\min\{S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ABD}\}\leqslant S_{\triangle ABP}\leqslant\max\{S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ABD}\}$.

2. 在论证有关三角形的几何不等式中,下面的代换也常常施行,如图 21-3,作$\triangle ABC$内切圆,顶点到切点间线段长分别是x,y,z,则$a=y+z, b=z+x, c=z+y$.反之,若三个正数a,b,c可表述成上述形式(x、y、$z>0$),易知它们可以构成一个三角形的边长.

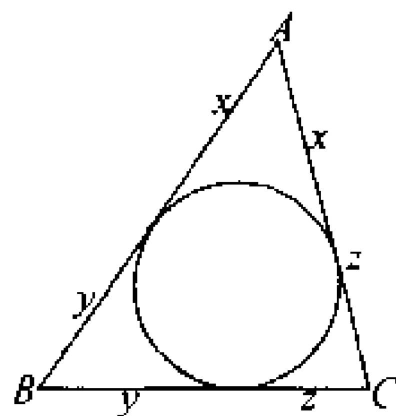


图 21-3

例 题 精 讲

例1 在半径为5米的圆形池塘中,有6只小鸭子在游动,求证:

不论何时，至少有两只小鸭子之间的距离不超过 5 米.

证明 设圆形池塘的圆心 O，6 只小鸭子为 $A_1,A_2,\cdots,A_6$.

(ⅰ) 如果有一只小鸭子在圆 O，则命题显然成立.

(ⅱ) 如果没有一只小鸭子在圆心 O，连接 OA_i 延长交圆于 B_i，若 OB_i 与 $OB_j(i\neq j)$ 重合，则命题显然成立. 否则 $OB_i(i=1,2,\cdots,6)$ 中没有两个重合，至少有一个角 $\angle B_iOB_j\leqslant 60^\circ(i\neq j)$，从而 $\angle OA_jA_i$、$\angle OA_iA_j$ 之中至少有一个角 $\geqslant 60^\circ$，如图 21-4 所示. 于是 OA_i 与 OA_j 之中至少有一条不小于 A_iA_j. 因 OA_i、OA_j 均不超过半径长，所以 $A_iA_j\leqslant 5$. 命题获证.

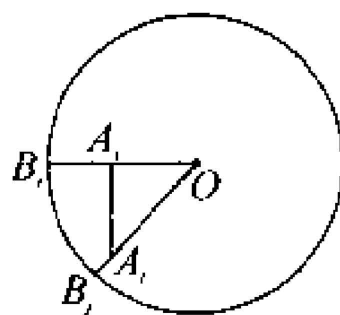


图 21-4

例 2 凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，而 $\triangle ABO$ 和 $\triangle CDO$ 的外接圆圆心分别为 P、Q. 求证：$AB+CD\leqslant 4PQ$.

分析 容易想到，如图 21－5，过 O 作直线交两圆于 K、L，则

$$2PQ\geqslant KL. \quad ①$$

事实上，设 P、Q 在直线 KL 上射影为 M、N，那么 $OM=MK$，$ON=NL$，于是 $MN=\frac{1}{2}KL$.

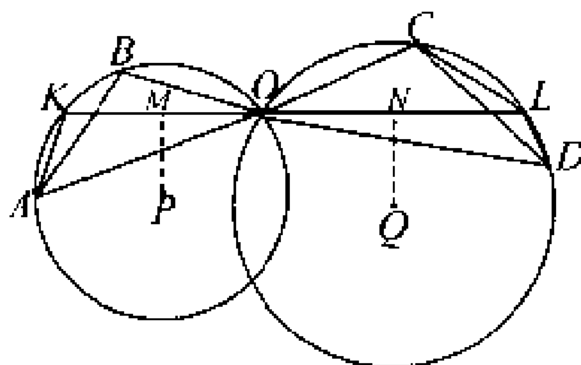


图 21-5

因 $MN\leqslant PQ$，故①式成立.

连接 KB、KA，有 $KA+KB>AB$. 因 $\angle KBO+\angle KAO=\pi$，故 $\angle KBO$、$\angle KAO$ 至少有一角不为锐角，不妨设 $\angle KBO\geqslant\frac{\pi}{2}$，则 $KO>KB$. 考虑到，若有 OK 平分 $\angle AOB$，则还有 $AK=BK$，从而

$$2KO>KA+KB>AB, \quad ②$$

同理

$$2OL>LC+LD>CD. \quad ③$$

②，③相加，利用①即可获证. 据此，现只须作出直线 KL 平分

$\angle AOB$.

例 3 圆 S_1 和 S_2 的半径都是 r,相交于 A 和 B,点 K 是圆 S_1 上的那段位于圆 S_2 内部的 $\overparen{AB}$ 中点,点 C 在圆 S_1 上,但在 S_2 之外.线段 KC 与圆 S_2 相交于 D. 证明:$S_{ACBD} \leqslant r^2$.

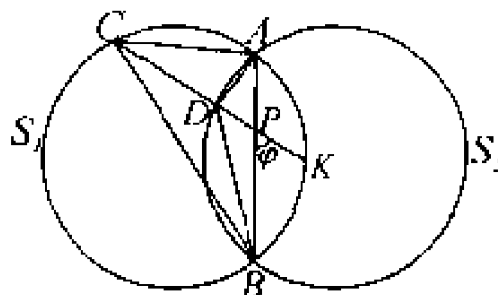


图 21-6

分析 割补是面积计算的常用手段,在有关面积的不等式证明中仍发挥着牵线搭桥的重要作用.由图 21-6 知

$$S_{ACBD} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABD}.$$

注意到两圆公共弦的独特地位,设 AB、CD 的夹角为 α,从而

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= (S_{\triangle ACP} - S_{\triangle ADP}) + (S_{\triangle BCP} - S_{\triangle BDP}) \\ &= (\frac{1}{2}AP \cdot CP\sin\varphi - \frac{1}{2}AP \cdot DP\sin\varphi) \\ &\quad + (\frac{1}{2}BP \cdot CP\sin\varphi - \frac{1}{2}BP \cdot DP\sin\varphi) \\ &= \frac{1}{2}\sin\varphi[CP(AP + BP) - DP(AP + BP)] \\ &= \frac{1}{2}\sin\varphi(AP + BP)(CP - DP) \\ &= \frac{1}{2}AB \cdot CD\sin\varphi \leqslant \frac{1}{2}AB \cdot CD. \end{aligned}$$

进一步考察 CD 的最大值.如图 21-7,经过两圆圆心引直线 l,设它与圆 S_1 的交点 K、M,点 L 是直线 l 与圆 S_2 的位于 K 和 M 之间的交点.当点 C 异于 M 时,作弦 CM、DL 及直线 $DN /\!/ CM$,$N \in l$. 由于 $\angle MCK = \angle CDN = 90°$,故知 $MN > CD$. 而 $\angle LDK$ 是劣弧所对圆周

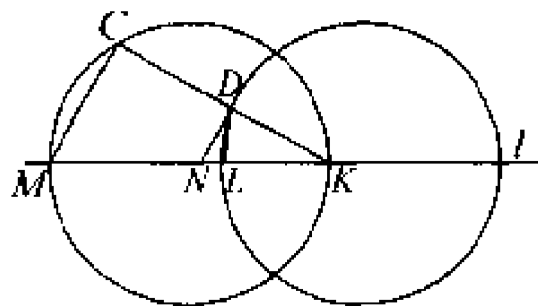


图 21-7

角，故为锐角，所以点 L 位于 K 和 N 之间，且 $CD < MN < LM$. 特别地，当点 C 与点 M 重合，此时点 D 与点 L 重合，设两圆圆心之间的距离为 d，于是就有 $LM = d, AB = \sqrt{4r^2 - d^2}$，由此即得

$$S_{ABCD} \leqslant \frac{1}{2} AB \cdot LM$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{d^2(4r^2 - d^2)}$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 + 4r^2 - d^2}{2} = r^2.$$

例 4　设 M 是 $\triangle ABC$ 内任意一点，P、Q 和 R 分别是 $\triangle AMC$，$\triangle AMB$ 和 $\triangle BMC$ 的外心，求证：$S_{\triangle PQR} \geqslant S_{\triangle ABC}$.

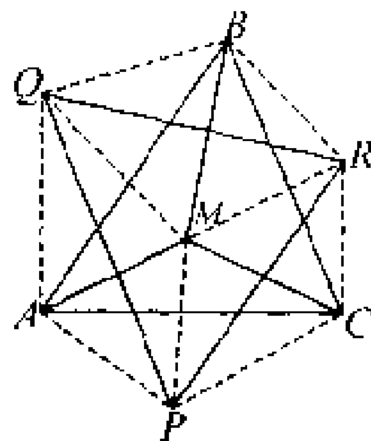


图 21-8

证明　如图 21-8，连 PA、PC、RC、RB、QB、QA、MP、MQ、MR. 因 P，R 分别为 $\triangle AMC$，$\triangle CMB$ 的外心，有 $PC = PM$，$RC = RM$，故 $\triangle PCR \cong \triangle PMR$. 同理 $\triangle QBR \cong \triangle QMR$，$\triangle QAP \cong \triangle QMR$. 故 $S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} S_{APCRBQ}$.

因 $\angle QPA = \angle QPM$，$\angle RPC = \angle RPM$，故 $\angle APC = 2\angle QPR = 2(\pi - \angle AMC)$. 同理 $\angle CRB = 2 \cdot (\pi - \angle CMB)$，$\angle BQA = 2(\pi - \angle BMA)$. 于是

$$\angle APC + \angle CRB + \angle BQA$$
$$= 6\pi - 2(\angle AMC + \angle CMB + \angle BMA) = 2\pi.$$

分别以 BC、AC 为弦作视角为 $\angle BRC$ 与 $\angle CPA$ 的圆弧，交于点 C 及另一点 N，则 $\angle ANB = \angle BQA$.

因 $\angle APC = \angle ANC$，且 $AP = PC$，注意到一边固定及该边所对角相等的三角形中，以固定边作底边的等腰三角形面积最大，故 $S_{\triangle APC} \geqslant S_{\triangle ANC}$. 同理 $S_{\triangle CRB} \geqslant S_{\triangle CNB}$，$S_{\triangle BQA} \geqslant S_{\triangle BNA}$. 若 N 位于 $\triangle ABC$ 内，则 $S_{\triangle ABC} \leqslant \frac{1}{2} S_{\triangle APCRBQ}$（$N$ 在 $\triangle ABC$ 外结论依然成立）. 因此，$S_{\triangle ABC}$

$\leqslant S_{\triangle PQR}$.

例 5 如图 21－9，在同心圆 O、O_1 中，大圆半径是小圆半径的两倍，小圆 O 的内接四边形 $ABCD$ 的各边的延长线顺次交大圆 O_1 于 B_1、C_1、D_1、A_1，则

$$A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1A_1 \geqslant 2(AB+BC+CD+DA).$$

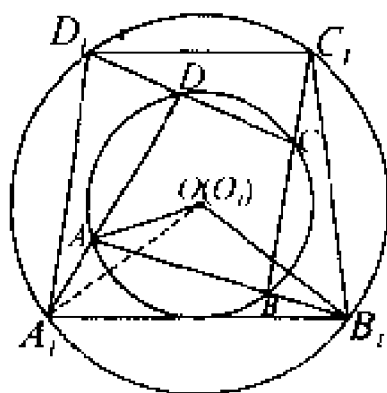


图 21-9

证明 根据托勒密定理可得

$$A_1B_1 \cdot OA + AA_1 \cdot O_1B_1 \geqslant O_1A_1 \cdot AB_1. \quad ①$$

因 $O_1B_1=O_1A=2OA$，$AB_1=AB+BB_1$，将它们代入①，有

$$A_1B_1 \geqslant 2AB+2(BB_1-AA_1).$$

同理

$$B_1C_1 \geqslant 2BC+2(CC_1-BB_1),$$

$$C_1D_1 \geqslant 2CD+2(DD_1-CC_1),$$

$$D_1A_1 \geqslant 2DA+2(AA_1-DD_1).$$

将上述各式两端分别相加，即得所要证的不等式.

例 6 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，求证：$\angle PAB$、$\angle PBC$、$\angle PCA$ 中至少有一个小于等于 $30°$.

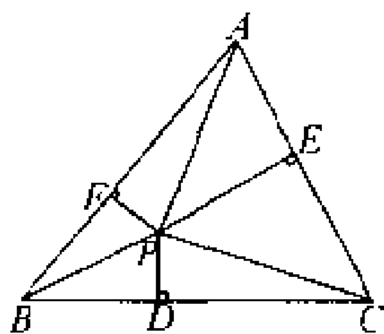


图 21-10

证明 如图 21－10，D、E、F 分别为 P 在 BC、CA、AB 上的射影. 假若命题不成立，则 $30° < \angle PAB$，$\angle PBC$、$\angle PCA < 120°$，于是，有 $\dfrac{PF}{PA}=\sin\angle PAB > \sin 30° = \dfrac{1}{2}$，即得 $2PE > PA$.

同理 $2PD > PB$，$2PE > PC$. 将上述不等式相加，得

$$PA+PB+PC<2(PD+PE+PF),$$

这与艾尔多斯—莫迪尔不等式矛盾，故命题获证.

例 7 设 a、b，c 是三角形的边长，证明

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqslant 0. \quad ①$$

并确定等号在什么时候成立?

证明 令 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$,则①式右边写成

$$(y+z)^2(x+z)(y-x)+(x+z)^2(x+y)(z-y)$$
$$+(x+y)^2(y+z)(x-z)\geqslant 0.$$

展开化简,即为

$$x^3z+y^3x+z^3y-xyz(x+y+z)\geqslant 0.$$

也就是
$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geqslant x+y+z. \qquad ②$$

根据排序不等式,有

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geqslant x^2\,\frac{1}{x}+y^2\,\frac{1}{y}+z^2\,\frac{1}{z}=x+y+z.$$

故②式成立,即得所要证的不等式.

当且仅当 $x=y=z$,即 $a=b=c$ 时,①式取等号.

例 8 已给$\triangle ABC$,设 I 是它的内心,角 A、B、C 的内角平分线分别与对边交于 A'、B'、C'.求证:

$$\frac{1}{4}<\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leqslant\frac{8}{27}. \qquad ①$$

证明 如图 21-11,因 AA' 是$\angle BAC$ 的平分线,所以 $A'C=\frac{ab}{b+c}$.又因 CI 是$\triangle ACA'$ 的平分线,所以

$$\frac{AI}{AA'}=\frac{b}{b+\frac{ab}{b+c}}=\frac{b+c}{a+b+c}.$$

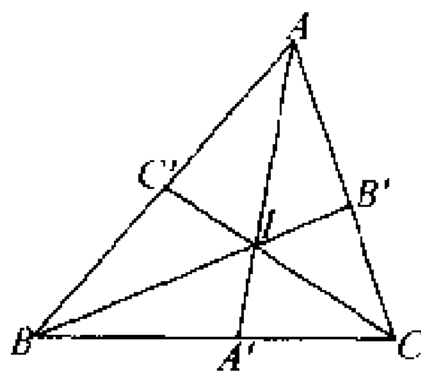


图 21-11

同理,有$\frac{BI}{BB'}=\frac{c+a}{a+b+c}$,$\frac{CI}{CC'}=\frac{a+b}{a+b+c}$.

不等式①等价于

$$\frac{1}{4}<\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\leqslant\frac{8}{27}. \qquad ②$$

由平均值不等式,得

$$(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\leqslant \left(\frac{a+b+b+c+c+a}{3}\right)^3$$

$$= \frac{8}{27}(a+b+c)^3,$$

所以
$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leqslant \frac{8}{27}.$$

显见 $\frac{a+b}{a+b+c} > \frac{1}{2}, \frac{b+c}{a+b+c} > \frac{1}{2}, \frac{ca}{a+b+c} > \frac{1}{2}$. 令 $\frac{a+b}{a+b+c} = \frac{1+\varepsilon_1}{2}, \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{1+\varepsilon_2}{2}, \frac{c+a}{a+b+c} = \frac{1+\varepsilon_3}{2}$, 则 $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 1(\varepsilon_i > 0, i = 1,2,3)$. 于是

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} = \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}{8}$$

$$> \frac{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{8} = \frac{1}{4}.$$

注 例 8 中,我们引入了参数 ε_1、ε_2、ε_3,利用等量关系 $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 1$,将不等式关系转化为等量关系巧妙地证明了左边不等式. 这是不等式证明的一种重要技巧.

例 9 平面上给定一个由很多条线段组成的集,线段总长为 1,证明存在一条直线 l,使得已给线段在 l 上的射影之和小于 $\frac{2}{\pi}$.

证明 取一条不与已给线段垂直的直线作 x 轴,将所给线段按照斜率的大小排成一列: $l_{-n}, l_{-(n-1)}, \cdots, l_{-1}, l_0, l_1, \cdots, l_m$(其中负的下角标表示该线段的斜率为负,非负的下角标则表示斜率非负). 经过平移可以将这些线按上面的顺次一个接一个地首尾相连形成一个凸折线,设端点 A、B, AB 中点为 O. 关于 O 作中心对称,产生一个凸多边形(包括退化为直线段),周长为 2,每一条边与对应边平行(或共线).

这个多边形的最小宽度,也就是各对平行边之间的距离的最小值,设为 d,以 O 为圆心 d 为直径的圆一定完全在多边形内,否则,设⊙O 与某条边 l_i 相交于 X,那么 X 关于 O 的对称点 X' 是⊙O 与对

边 l_i' 的交点，l_i 与 l_i' 的距离小于 XX'，即小于 d，与 d 为最小宽度矛盾.

由于⊙O 的周长为 $\pi d<2$，即 $d<\frac{2}{\pi}$，这是因为在面积一定的闭曲线中，以圆的周长最小.

取直线 l 与距离最小的平行边垂直，则各已知线段在 l 上的射影之和不超过 d，也就小于 $\frac{2}{\pi}$.

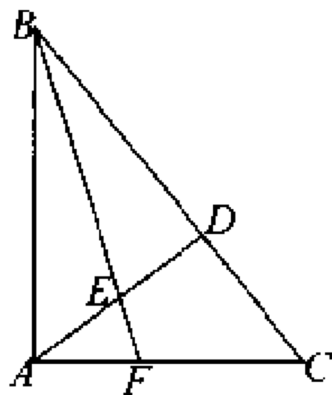
注 (1) 例 9 的解答巧在通过排序——平移——中心对称等技术上的处理使所给线段呈现一种简单有序、射影和易于估算的状态，困难得以化解.

(2) 通过对称、旋转等变换，以直代曲，将复杂的不等式归结到基本不等式是一种重要技巧.

练 习 二 十 一

1. 从△ABC 的外接圆 O 上的一点 P 作 $PD\perp AB$ 于 D，$PE\perp AC$ 于 E，求证：$DE\leqslant BC$.

2. 在△ABC 中，$\angle A=90°$，$AD\perp BC$ 于 D，$\angle B$ 的平分线分别与 AD、AC 交于 E、F(如图). 若 $AC=\sqrt{2}$，求证：$\frac{EF}{CD}<AF\cdot CF$.



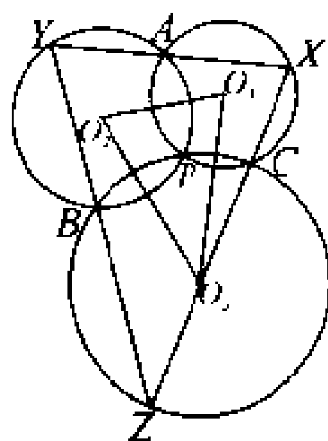
(第 2 题)

3. 两个正△ABC、△$A'B'C'$ 内接于一个半径为 r 的圆 O，其公共部分的面积为 S，求证：$2S\geqslant\sqrt{3}r^2$.

4. △ABC 中各边不等，G、K、H 分别为重心、内心与垂心，证明 $\angle GKH>90°$.

5. 如图，K_1、K_2、K_3 为三个圆，交于 P 点，圆心分别为 O_1、O_2、O_3，设 K_1 与 K_2 又交于 A，K_2 与 K_3 又交于 B，K_3、K_1 又交于 C. X 为 K_1(K_2、K_3 外)一点，直线 XA 交 K_2 于 Y，直线 XC 交 K_3 于 Z. 证明

$S_{\triangle XYZ} \leqslant 4S_{\triangle O_1O_2O_3}$.



(第 5 题)

6. a, b, c 是$\triangle ABC$ 的三边，S 为其面积，求证：$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$.

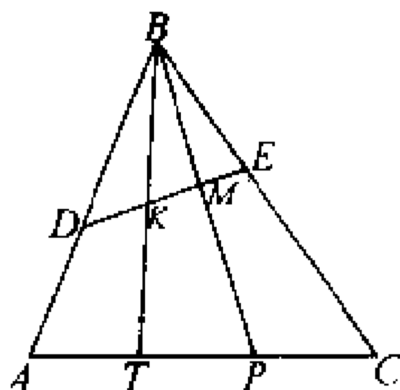
7. 在$\triangle ABC$ 中，求证：

$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leqslant 3abc$.

8. 在$\triangle ABC$ 中，求证：

$$\cot^3\frac{A}{2} + \cot^3\frac{B}{2} + \cot^3\frac{C}{2} \geqslant 9\sqrt{3}.$$

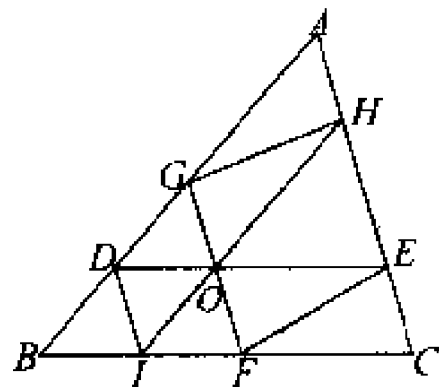
9. 点 D 和 E 分别位于$\triangle ABC$ 的边 AB 和 BC 上，点 K 和 M 将线段 DE 分成三等分（如图），直线 BK 和 BM 分别与边 AC 相交于 T 和 P，证明：$TP \leqslant \frac{1}{3}AC$.



(第 9 题)

10. 在直角$\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高，过$\triangle ABD$ 的内心与$\triangle ACD$ 的内心的直线分别交边 AB 和 AC 于 K 和 L. $\triangle ABC$ 和$\triangle AKL$ 的面积分别记为 S 和 T. 求证：$S \geqslant 2T$.

11. 过$\triangle ABC$ 内一点引三边的平行线（如图）. $DE \parallel BC$, $FG \parallel CA$, $HI \parallel AB$. 点 D, E, F, G, H, I 都在$\triangle ABC$ 的边上，S_1 表示六边形 $DGHEFI$ 的面积，S_2 表示$\triangle ABC$ 的面积，求证：$S_1 \geqslant \frac{2}{3}S_2$.



(第 11 题)

12. 设在圆内接凸六边形 $ABCDEF$ 中，$AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. 试证：

(1) AD, BE, CF 三条对角线交于一点；

(2) $AB + BC + CD + DE + EF + FA \geqslant AD + BE + CF$.

13. 设在凸四边形 $ABCD$ 中，$AB = AD + BC$. 在此四边形内，距

离 CD 为 h 的地方有一点 P，使得 $AP = h + AD$，$BP = h + BC$．求证：

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

第二十二讲　复数与几何

知识点和方法述要

1. 复数及其运算的几何意义，使得点和向量可用复数表示，这给复数进一步注入了活力，赋予了多种功能，为复数在几何中应用提供了可能.

用复数解几何问题时的基本思路是从题设的几何条件出发，先把这些条件用对应的复数关系式表示出来，通过一系列的复数计算，得出新的关系式，再把它们转化为我们所需要的几何结论.

2. 为简便起见，我们常用表示点的字母同时表示对应的复数.

我们知道向量$\overrightarrow{Z_1Z_2}$的复数表示是 Z_2-Z_1，设点 Z 分有向线段 Z_1Z_2 成定比 λ，即

$$\overrightarrow{Z_1Z}=\lambda\overrightarrow{Z_1Z_2}(\lambda\neq-1),$$

于是

$$\frac{Z-Z_1}{Z_2-Z}=\lambda,$$

解得

$$Z=\frac{Z_1+\lambda Z_2}{1+\lambda}. \quad ①$$

这就是定比分点的复数形式.

当 $\lambda=1$ 时，由①得线段 Z_1Z_2 中点的复数形式：$Z=\frac{Z_1+Z_2}{2}$，与解析几何中线段定比分点及中点表示形式相比，复数形式将两个式子统一在一起，使用起来更方便.

3. 对于共线三点 Z_1、Z_2、Z_3，不妨设 Z_3 在连线 Z_1Z_2 上. 根据定比分点公式①，有

$$Z_3=\frac{1}{\lambda+1}Z_1+\frac{\lambda}{\lambda+1}Z_2,$$

令 $\lambda_1=\frac{1}{1+\lambda}$，$\lambda_2=\frac{\lambda}{1+\lambda}$，$\lambda_3=-1$，显然 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不全为零，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$，且

$$\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2+\lambda_3 Z_3=0.$$

反之，若存在三个不全为零的实数 λ_1、λ_2、λ_3，适合 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$，并且使得

$$\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2+\lambda_3 Z_3=0.$$

那么将上述过程反推即知 Z_1、Z_2、Z_3 三点共线，于是有

定理 存在三个不全为零的实数 λ_1、λ_2、λ_3 满足

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,$$

且
$$\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2+\lambda_3 Z_3=0,$$

是平面上三点 Z_1、Z_2、Z_3 共线的充要条件.

显然，由定理1可得

推论 若平面上三点 Z_1、Z_2、Z_3 不共线，且满足

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,$$

及
$$\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2+\lambda_3 Z_3=0,$$

则
$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

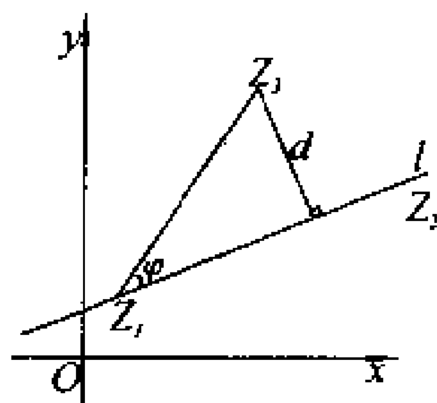


图 22-1

4. 如图 22-1，设 Z_1、Z_2 为直线 l 上两点，Z_3 为直线外一点，于是在 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 方向上的单位向量为 $\frac{Z_2-Z_1}{|Z_2-Z_1|}$，而 Z_1Z_3 方向上单位向量为 $\frac{Z_3-Z_1}{|Z_3-Z_1|}$，根据复数除法的几何意义，由 Z_1Z_2 旋转到 Z_1Z_3 所转过的角度 φ 由上式确定：

$$\sin\varphi=\operatorname{Im}\left(\frac{|Z_2-Z_1|}{|Z_3-Z_1|}\cdot\frac{(Z_3-Z_1)}{(Z_2-Z_1)}\right)$$

$$= \frac{1}{|Z_3 - Z_1||Z_2 - Z_1|}\operatorname{Im}(-Z_1\overline{Z}_2 + \overline{Z}_2 Z_3 - Z_3\overline{Z}_1 + Z_1\overline{Z}_1) \quad ①$$

因为 $|Z_1|^2$ 是实数，$\operatorname{Im}(-Z_1\overline{Z}_2) = \operatorname{Im}(\overline{Z}_1 Z_2)$，$\operatorname{Im}(-Z_3\overline{Z}_1) = \operatorname{Im}(\overline{Z}_3 Z_1)$，故由①知点 Z_3 到直线 Z_1Z_2 距离为

$$d = \frac{1}{|Z_2 - Z_1|}\operatorname{Im}(\overline{Z}_1 Z_2 + \overline{Z}_2 Z_3 + \overline{Z}_3 Z_1). \quad ②$$

按照通常的约定：距离值非负，上式应取绝对值.

进一步，由②可得$\triangle Z_1Z_2Z_3$ 面积

$$S_{\triangle Z_1Z_2Z_3} = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(\overline{Z}_1 Z_2 + \overline{Z}_2 Z_3 + \overline{Z}_3 Z_1)|. \quad ③$$

顶点 Z_1、Z_2、Z_3 绕行方向为逆时针方向时，③可直接去掉绝对值符号，若顶点 Z_1、Z_2、Z_3 绕行方向顺时针方向时，③在去掉绝对值符号后添上“-”号.

例 题 精 讲

例 1 已知$\triangle ABC$ 和平面上点 P，如图 22-2，$|PC| = 27$，P 依次“跳”到 $A, B, C, A, B, C, \cdots$，的对称位置，问：经过 1991 次后能跳到的地方离 P 点有多远？

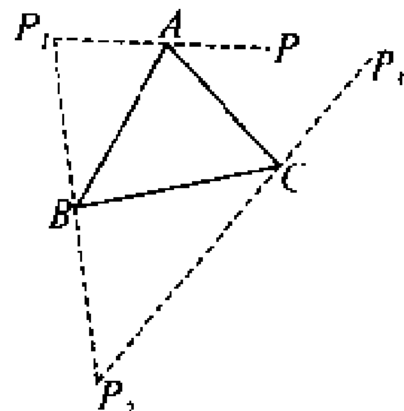


图 22-2

分析 在复平面上考虑，设 P 依次跳到 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$. 于是 $A, B, C, A, B, C, \cdots$ 也依次成为线段 $PP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \cdots, P_{n-1}P_n$ 的中点，根据线段中点的复数形式，有

$$P + P_1 = 2A, \quad ①$$

$$P_1 + P_2 = 2B, \quad ②$$

$$P_2 + P_3 = 2C, \quad ③$$

$$P_3 + P_4 = 2A, \quad ④$$

$$P_4 + P_5 = 2B, \quad ⑤$$

$$P_5 + P_6 = 2C, \quad ⑥$$

由①得 $P_1 = 2A - P.$ ⑦

⑦代入②得 $P_2 = 2B - 2A + P.$ ⑧

⑧代入③得 $P_3 = 2C - 2B + 2A - P.$ ⑨

⑨代入④得 $P_4 = 2B - 2C + P.$ ⑩

⑩代入⑤得 $P_5 = 2C - P.$ ⑪

⑪代入⑥得 $P_6 = P.$

继续上述过程，则有 $P_7 = P_1, P_8 = P_2, \cdots$ 呈周期现象：$P_{6k} = P$，$P_{6k+1} = P_1 = 2A - P$，$P_{6k+2} = P_2 = 2B - 2A + P$，$P_{6k+3} = P_3 = 2C - 2B + 2A - P$，$P_{6k+4} = P_4 = 2B - 2C + P$，$P_{6k+5} = P_5 = 2C - P$. 这里 k 为非负整数，由此知

$$P_{1991} = P_{5+6\times 331} = P_5 = 2C - P.$$

可见

$$|P_{1991}P| = |2C - P - P|$$

$$= 2|C - P| = 2|CP| = 2 \times 27 = 54.$$

例 2 如图 22-3，线段 AB 的中点为 M，在线段 AB 上另取一点 C，D 位于直线 AB 外，连接 CD，线段 CD 中点为 N，BD 中点为 P，MN 中点为 Q，求证：直 PQ 平分线段 AC.

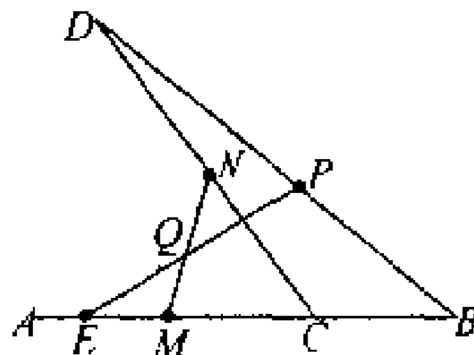


图 22-3

分析 设 PQ 与 AB 交于 E，以 M 为原点，直线 AB 为实轴，建立复平面，则 $M = 0, A + B = 0, I_{m(D)} \neq 0$. 问题等价于证明 $E = \frac{A+C}{2}$. 依题设，$P = \frac{D+B}{2}$，$N = \frac{C+D}{2}$，$Q = \frac{M+N}{2} = \frac{C+D}{4}$，由于 E、Q、P 三点共线，所以根据定理 1 知，存在三个不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，使得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad ①$$

且 $$\lambda_1 E+\lambda_2 Q+\lambda_3 P=0. \qquad ②$$

将 $P=\dfrac{D+B}{2}$，$Q=\dfrac{C+D}{4}$代入②得

$$\lambda_1 E+\lambda_2\cdot\frac{C+D}{4}+\lambda_3\cdot\frac{B+D}{2}=0,$$

即 $$4\lambda_1 E+(C+D)\lambda_2+2\lambda_3(B+C)=0.$$

上式可变为

$$4\lambda_1 E+\lambda_2 C+2\lambda_3 B=-(\lambda_2+2\lambda_3)D. \qquad ③$$

③式左边为实数，所以

$$\begin{cases}\lambda_2+2\lambda_3=0, & ④\\ 4\lambda_1 E+\lambda_2 C+2\lambda_3 B=0. & ⑤\end{cases}$$

不妨取 $\lambda_3=-1$，则由④知 $\lambda_2=2$. 将 $\lambda_3=-1$，$\lambda_2=2$ 代入①得 $\lambda_1=-1$，将它们代入⑤得 $E=\dfrac{C-B}{2}=\dfrac{A+C}{2}$.

例 3 对于任意三角形，求证：

(1) 三边上的高共点垂心.

(2) 外心、重心、垂心共线，且外心到重心的距离等于重心到垂心距离的一半.

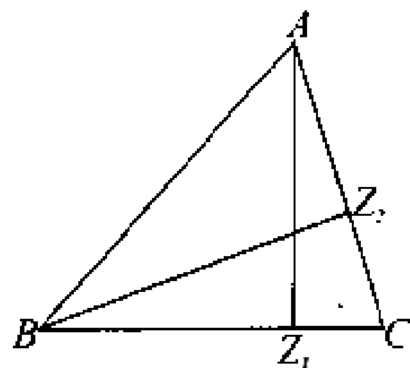


图 22-4

证明 设在复平面上，三角形 AB(外心为原点 O(如图 22－4)，且不妨设三角形 ABC 内接于单位圆周，有 $|A|=|B|=|C|=1$，即 $\overline{A}=\dfrac{1}{A}$，$\overline{B}=\dfrac{1}{B}$，$\overline{C}=\dfrac{1}{C}$. 从顶点 A、B、C 向对边引垂线，垂足分别为 Z_1、Z_2、Z_3. 因为 $AZ_1\perp BC$，所以

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Z_1-A}{C-B}\right)=0,$$

即 $$\mathrm{Re}[(Z_1-A)(\overline{C-B})]=0.$$

于是 $$(Z-A)(\overline{C-B})+(\overline{Z_1-A})(C-B)=0.$$

化简得 $$Z_1-BC\overline{Z_1}=A-\frac{BC}{A}. \qquad ①$$

设 AZ_1 与 BZ_2 交点为 H,则由上述推导过程同样可得

$$H - BC\overline{H} = A - \frac{BC}{A}. \tag{②}$$

同理,有

$$H - CA\overline{H} = B - \frac{AC}{B}. \tag{③}$$

由②,③解得 $H = A + B + C$.因 H 是 A,B,C 的对称式,可见 CZ_3 也过点 H,故$\triangle ABC$ 三条高交于点 H.

注 1.例3中由于复数 $O,\frac{1}{3}(A+B+C),A+B+C$ 分别对应$\triangle ABC$ 的外心,重心、垂心,它们是显然共线且外心到重心距离等于重心到垂心距离的一半.这里又一次证明了欧拉定理.

2. 例3中证明线共点的方法具有普遍性.用复数证明线共点问题时,常采用同一法,即通过论证这些直线上存着同一个点导致结论成立.这样做不仅证了直线共点,还同时一举求得了这个公共点的复数表示.

3. 前面数例也告诉我们在运用复数解决问题时一个显著特点是只须进行若干复数运算,免却了不少因添加辅助线带来的思维上的困难.

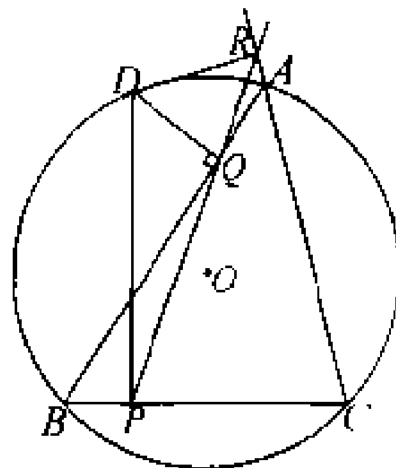


图 22-5

例4 自$\triangle ABC$ 的外接圆上任一点 D 向三边 BC、CA、AB 引垂线,垂足为 P、Q、R(如图 22-5),试用复数证明

(1) P、Q、R 三点共线——$\triangle ABC$ 的关于D点的西姆松线.

(2) 在同一圆周上的四点 A、B、C、D 中,取三点为顶点作三角形,剩下的一点关于此三角形有一条西姆松线,这样的西姆松线有四条,它们相交于一点.

证明 以$\triangle ABC$ 外接圆圆心 O 为原点,建立复平面,且不妨设 $|A| = |B| = |C| = 1$.

首先,B、P、C 三点共线,有

$$\overline{\left(\frac{P-B}{C-B}\right)}=\frac{P-B}{C-B},$$

也就是
$$(P-B)(\overline{C}-\overline{B})$$
$$=(\overline{P}-\overline{B})(C-B),$$

即
$$(P-B)\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)$$
$$=\left(\overline{P}-\frac{1}{B}\right)(C-B).$$

化简得
$$BC\cdot\overline{P}=B+C. \qquad ①$$

类似例 3 中①,又可得

$$P-BC\overline{P}=D-\frac{BC}{D}. \qquad ②$$

①+②得
$$P=\frac{1}{2}\left(B+C+D-\frac{BC}{D}\right).$$

同理得
$$Q=\frac{1}{2}\left(A+B+D-\frac{AB}{D}\right),$$
$$R=\frac{1}{2}\left(C+A+D-\frac{CA}{D}\right).$$

记 $S=\frac{1}{2}(A+B+C+D)$,于是

$$S-P=\frac{1}{2}\left(A+\frac{BC}{D}\right),$$
$$S-Q=\frac{1}{2}\left(C+\frac{AB}{D}\right),$$
$$S-R=\frac{1}{2}\left(B+\frac{AC}{D}\right).$$

下面我们来证明三点$(S-P)$、$(S-Q)$、$(S-R)$共线.为此,只须证明

$$\frac{\frac{1}{2}\left(C+\frac{AB}{D}\right)-\frac{1}{2}\left(A+\frac{BC}{D}\right)}{\frac{1}{2}\left(B+\frac{CA}{D}\right)-\frac{1}{2}\left(A+\frac{BC}{D}\right)}$$

$$= \frac{(CD + AB) - (AD + BC)}{(BD + CA) - (AD + BC)}$$

$$= \left(\frac{C - A}{B - A}\right)\left(\frac{D - B}{D - C}\right)$$

是实数.

由图 22 - 5 知，$\arg\left(\frac{C - A}{B - A}\right)$ 等于 $\overrightarrow{AB}$ 到 $\overrightarrow{AC}$ 的角，$\arg\left(\frac{D - B}{D - C}\right) = \arg\left(\frac{B - D}{C - D}\right)$ 等于 $\overrightarrow{DC}$ 到 $\overrightarrow{DB}$ 的角. 因此 $\arg\left(\frac{C - A}{B - A}\right) + \arg\left(\frac{D - B}{D - C}\right)$ 是 π 的整数倍，表明 $\left(\frac{C - A}{B - A}\right)\left(\frac{D - B}{D - C}\right)$ 是实数，所以 $(S - P)$、$(S - Q)$、$(S - R)$ 共线，因此有不全为零实数 λ_1、λ_2、λ_3，使得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \qquad ③$$

$$\lambda_1(S - P) + \lambda_2(S - Q) + \lambda_3(S - R) = 0. \qquad ④$$

由 ④ 可得出

$$S(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_3) - (\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R) = 0. \qquad ⑤$$

将 ③ 代入 ⑤ 得

$$\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R = 0. \qquad ⑥$$

由③、⑥知 P、Q、R 三点共线.

由 S 关于 A、B、C、D 的对称性可知 A 关于 $\triangle BCD$ 的西姆松线、B 关于 $\triangle COA$ 的西姆松线、C 关于 $\triangle CDA$ 的西姆松线、D 关于 $\triangle ABC$ 的西姆松线都必须通过点 S.

例 5 设 A、B、C、D 为平面上任意四点，求证：

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

分析 欲证不等式在复平面上等价于

$$|C - A| \cdot |D - B| \leqslant |B - A||D - C| + |D - A||C - B|. \qquad ①$$

现构造恒等式

$$(B - A)(D - C) + (D - A)(C - B) = (C - A)(D - B),$$

两边取模，得

$$|(B - A)(D - C) + (D - A)(C - B)| = |(C - A)(D - B)|, \qquad ②$$

进而，有

$$|(B-A)(D-C)+(D-A)(C-B)|$$
$$\leqslant|(B-A)(D-C)|+|(D-A)(C-B)|.$$

即
$$|(B-A)(D-C)+(D-A)(C-B)|$$
$$\leqslant|B-A||D-C|+|D-A||C-B|. \qquad ③$$

又
$$|(C-A)(D-B)|=|C-A|\cdot|D-B|. \qquad ④$$

由②、③、④可得①.

①中等号当且仅当$(B-A)(D-C)$与$(D-A)(C-B)$辐角主值相等时成立，此时

$$\arg\left(\frac{A-B}{A-D}\right)=\arg\left(-\frac{B-C}{D-C}\right),$$

A、B、C、D 四点共圆.

注 例6中运用复数证明了托勒密定理的推广.

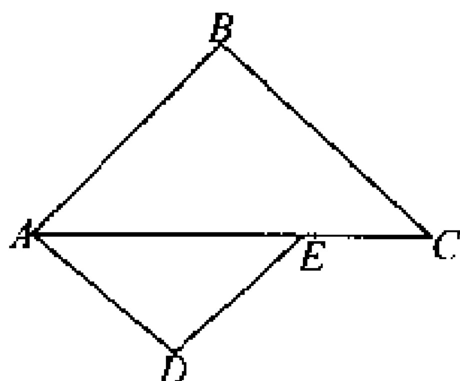


图 22-6

例6 如图 22－6，$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形，现固定$\triangle ABC$，而将$\triangle ADE$ 绕 A 点在平面上旋转. 试证：不论$\triangle ADE$ 旋转到什么位置，线段 EC 上必存在点 M，使得$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

分析 酌情将图形放置在复平面的适当位置上，如图 22－7，设 A、B、C 对应的复数为 0，$ae^{\frac{\pi}{4}i}$，$\sqrt{2}a\,(a>1)$，$|AD|=1$，D、E 对应复数为 $e^{i\theta}$，$\sqrt{2}e^{i(\theta,\frac{\pi}{4})}$，以 DB 为斜边作等腰直角$\triangle DNB$（N、D、B 按顺时针方向排列），于是

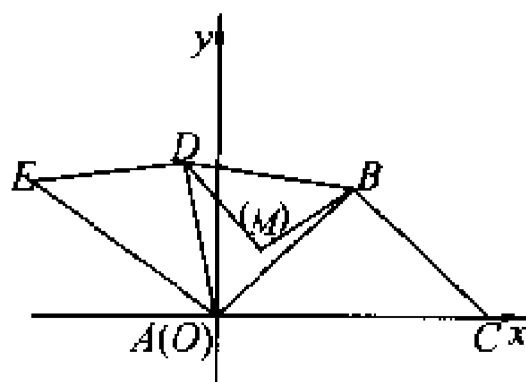


图 22-7

$$N-D=(B-D)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$= (ae^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\theta}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(a - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}).$$

$$N = e^{i\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}}[a - ei^{(\theta + \frac{\pi}{4})}]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}[a + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[2a + 2ei^{(\theta + \frac{\pi}{4})}]$$

$$= \frac{1}{2}(C + E),$$

N 又为线段 EC 的中点，即为符合要求的 M 点.

注 因为$|AB| > |AD|$，故 B、D 不重合，我们还可如图 22－8，将图形放置在复平面上，不妨设 $B = -1, D = 1$，于是

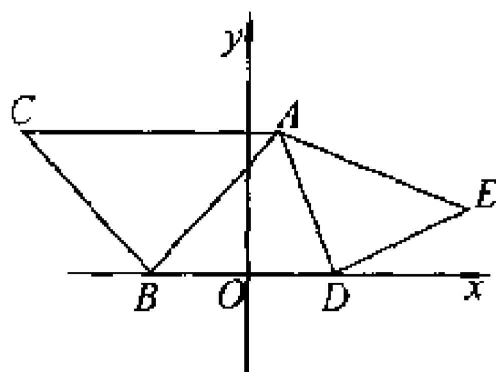


图 22-8

$$(E - D) = (A - D)(-i),$$

可得 $\quad E = 1 - (A - 1)i \quad$ ①

同样 $\quad C - B = (A - B)i.$

得 $\quad C = -1 + (A + 1)i. \quad$ ②

设 EC 中点为 P，则由①，②知

$$P = \frac{1}{2}(E + C) = i,$$

$\triangle PBD$ 构成等腰直角三角形，P 即为满足条件的点 M.

例 7 证明：自$\odot O$ 上任一点 P 到正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的各个顶点距离的平方和为定值.

证明 以正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心 O 为原点，外接圆半径长为单位，射线 OA_n 为实轴正半轴建立复平面，顶点 A_1 与复数 $\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ 对应，顶点 $A_2, A_3, \cdots, A_n$ 分别与复数$\varepsilon^2, \varepsilon^3, \cdots, \varepsilon^n (=1)$对应，点 P 与

复数 z 对应,从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|PA_k|^2 &= \sum_{k=1}^{n}|z-\varepsilon^k|^2\\ &= \sum_{k=1}^{n}(2-\varepsilon^k\bar{z}-\bar{\varepsilon}^k\cdot z)\\ &= 2n-\bar{z}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k - z\overline{\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k}\\ &= 2n.\end{aligned}$$

命题获证.

注 例 7 中正多边形的顶点与单位根的对应关系使复数成为研究正多边形的有力工具.

例 8 证明:设 n 为奇数 $2m+1$,多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形,P 为$\overset{\frown}{A_1A_n}$上一点,则

$$\begin{aligned}&|PA_1|+|PA_3|+\cdots+|PA_{2m+1}|\\ &=|PA_2|+|PA_4|+\cdots+|PA_{2m}|.\end{aligned}$$

证明 以正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心 O 为原点,外接圆半径长为单位,射线 OA_n 为实轴的正半轴.点 P 对应复数 z,则所要证明的等式即

$$\sum_{k=0}^{m}|z-\varepsilon^{2k+1}|=\sum_{k=1}^{m}|z-\varepsilon^{2k}|. \quad ①$$

因

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}|z-\varepsilon^{2k+1}| &= \sum_{k=0}^{m}|\varepsilon^{-k}||z-\varepsilon^{2k+1}|\\ &= \sum_{k=0}^{m}|\varepsilon^{-k}z-\varepsilon^{k+1}| = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{-k}z-\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{k+1}|, \quad ②\\ \sum_{k=1}^{m}|z-\varepsilon^{2k}| &= \sum_{k=1}^{m}|\varepsilon^{-(k+m)}||z-\varepsilon^{2k}|\\ &= \sum_{k=1}^{m}|\varepsilon^{-(k+m)}\cdot z-\varepsilon^{-m+k}|\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} | \varepsilon^{-(k+m)} \cdot z - \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{m+k+1} |$$

$$= \sum_{k=m+1}^{2m} | \varepsilon^{-k} \cdot z - \sum_{k=m+1}^{2m} \varepsilon^{k+1} |. \quad ③$$

由
$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{-k} + \sum_{k=m+1}^{2m} \varepsilon^{-k} = 0,$$

及
$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{k+1} + \sum_{k=m+1}^{2m} \varepsilon^{k+1} = \sum_{k=0}^{2m} \varepsilon^{k+1} = 0.$$

知③即

$$| \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{-k} z - (- \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{k+1}) | = | \sum_{k=0}^{2m} \varepsilon^{-k} z - \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{k+1} |. \quad ④$$

由②、④相等,可知①式成立.

练习二十二

1. 凸四边形 $ABCD$ 围绕它所在的平面一点 O 逆时针方向旋转 $90°$,得到四边形 $A'B'C'D'$,P、Q、R、S 顺次是 $A'B$、$B'C$、$C'D$、$D'A$ 的中点.求证:$PR \perp QS$,$PR = QS$.

2. 在任意凸四边形各边上向外作正方形,求证:对边上的两个正方形的中心的连接互相垂直,且长度相等.

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中,若 $AC^2 \cdot BD^2 = AB^4 + AD^4$,求证:这平行四边形的锐角必为 $45°$.

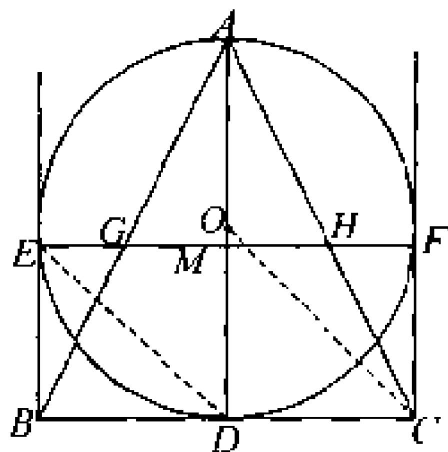
4. 证明:如果四边形 $ACPH$、$AMBE$、$AHBT$、$BKXN$、$CKXP$ 都是平行四边形,那么四边形 $ABTE$ 也是平行四边形(所有四边形的顶点都按逆时针排列).

5. 在平面内有两个等边三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$,它们的顶点按顺时针排列,从任意 O 引出分别等于$\overrightarrow{A_1A_2}$,$\overrightarrow{B_1B_2}$,$\overrightarrow{C_1C_2}$的向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$,证明:$\triangle ABC$ 是正三角形.

6. 在$\triangle ABC$ 每一边上向形外作正三角形 ABD、BCE、CAF,试证

此三个正三角形的重心 G_1、G_2、G_3 为一个正三角形的顶点.

7. 如图,设△ABC 为等腰三角形,BC 为底边,D 为 BC 中点,以 AD 为直径作圆,由 B、C 依次作圆的切线 BE 和 CF(不同于 BC),E、F 为切点,证明弦 EF 在△ABC 内部的一段的长,等于它在外两段长之和.



(第 7 题)

8. 已知两个半径为 1 的圆,它们的圆心距等于 1,在第一个圆任取点 A,第二个圆上取关于连心线对称的两点 B_1 和 B_2,试证:

$$AB_1^2+AB_2^2\geqslant 2.$$

试问等号何时成立.

9. 四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 都是某一国家同一地区的正方形地图,但用不同的比例尺绘制,将它们重合起来,试证在小地图上只有这样的一点 O,它和下面大地图上与之正对着的点 O' 都代表这个国家的同一地点.

10. 设 P 为空间任意一点,试证明:$PA^2\sin A+PB^2\sin B+PC^2\sin C\geqslant 2S_{\triangle ABC}$.

11. 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为⊙O 的内接凸多边形的顶点,求出这个多边形的所有边与所有对角线的平方和的最大值.

练习解答

练习一

1. **解**

$$a_{n+1}-a_n=\frac{9^{n+1}(n+2)}{10^{n+1}}-\frac{9^n(n+1)}{10^n}$$

$$=\frac{9^n(8-n)}{10^{n+1}}.$$

可以得到

当 $n=8$ 时，$a_9=a_8$；

当 $n>8$ 时，$a_{n+1}<a_n$；

当 $n<8$ 时，$a_{n+1}>a_n$.

可知，当 $n=8$ 或 9 时，a_n 有最大值是：$a_8=a_9=\frac{9^9}{10^8}$.

2. **解** 由 $\frac{1}{1-2+3+\cdots+k}=\frac{2}{k(k+1)}=2(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$ 可得

$$S=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}$$

$$=2(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$=2[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}]$$

$$=2\cdot(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}.$$

3. **解** $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$，有

$$P_n=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}-1}\cdot P_{n-1}$$

$$=\frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)}P_{n-1}.$$

故

$$P_{1995}=\frac{1995\times1996}{1997\times1994}P_{1994}$$

$$=\frac{1995\times1996}{1997\times1994}\times(\frac{1994\times1995}{1996\times1993}P_{1993})$$

$$=\cdots=\frac{1995}{1997}\times\frac{k+2}{k}\cdot P_k$$

$$=\cdots=\frac{1995}{1997}\cdot\frac{4}{2}P_2$$

$$=\frac{1995}{1997}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{2}$$

$$=\frac{5985}{1997}.$$

则

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k(k+1)}{(k+2)(k-1)}$$

$$=\frac{(\prod_{k=2}^{n}k)[\prod_{k=2}^{n}(k+1)]}{[\prod_{k=2}^{n}(k+2)][\prod_{k=2}^{n}(k-1)]},$$

$$=\frac{n!\frac{(n+1)!}{2}}{\frac{(n+2)!}{2\cdot3}\cdot(n-1)!}=\frac{3n}{n+2}.$$

同样可得，$P_{1995}=\frac{5985}{1997}$.

4. 解 $$S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots$$

$$+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4}-\cdots$$

$$+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

5. **解** 当 $n \geq 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1}$，代入得

$$S_n - S_{n+1} + 2S_nS_{n-1} = 0 \qquad ①$$

又对于任意 n 有 $S_n \neq 0$（否则 $S_n = 0, S_{n-1} = 0$，从而 $S_1 = a_1 = 0$ 与已知 $a_1 = 1$ 矛盾. 由①可得 $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2$，于是

$$\frac{1}{S_n} = (\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}}) + (\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_{n-2}}) + \cdots + (\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1}) + \frac{1}{S_1}$$

$$= 2(n-1) + 1 = 2n - 1.$$

6. **证明** $n = 1$ 时，命题显然成立. 假设 $n = k$ 时，命题成立，即

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2 + (k-1)^2 + k^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = \frac{k(2k^2+1)}{3},$$

那么，$n = k + 1$ 时，

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2$$

$$= \frac{k(2k^2+1)}{3} + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{3}[2k^3 + k - 3k^2 + 3(k+1)^2]$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)[2(k+1)^2 + 1].$$

命题成立.

综上所述，对一切自然数 n 命题成立.

7. **证明** （ⅰ）当 $n = 1$ 时，$f(1 \cdot x) = f(x) = 1^2 \cdot f(x)$.

（ⅱ）假设 $n = k$ 时，有 $f(kx) = k^2 f(x)$，则 $n = k + 1$ 时，有

$$f[(k+1)x] = f(kx + x)$$

$$= f(kx) + f(x) + 2\sqrt{f(kx)f(x)}$$

$$= k^2 + f(x) + 2\sqrt{k^2 f^2(x)}$$

$$= (k+1)^2 f(x).$$

$n = k + 1$ 时命题成立.

综合（ⅰ）、（ⅱ），对任意自然数 n 命题成立.

8. **证明** （ⅰ）$n = 2$ 时，$S_1 = a_1 = 1, 2(S_2 - 1) = 2(a_1 + a_2 - 1) = 2(1 + \frac{1}{2} - 1) = 1$. 命题成立.

（ⅱ）假设 $n = k$ 时，命题成立，即

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{k-1} = k(S_k - 1),$$

则 $n = k+1$ 时,

$$\begin{aligned} & S_1 + S_2 + \cdots + S_k \\ &= k(S_k - 1) + S_k \\ &= (k+1)(S_{k+1} - a_{k+1}) - k \\ &= (k+1)(S_{k+1} - \frac{1}{k+1}) - k \\ &= (k+1)(S_{k+1} - 1). \end{aligned}$$

$n = k+1$ 时,命题成立.

综合(ⅰ),(ⅱ),对一切自然数 $n \geqslant 2$,命题成立.

9. **证明** (ⅰ)当 $n=1$ 时,$a^3 + (a+1)^3 = (2a+1)(a^2+a+1)$,$(2a+1)(a^2+a+1)$能被 a^2+a+1 整除.当 $n=1$ 时命题获证.

(ⅱ)假设 $n = k(k \in \mathrm{N})$时,$a^{k+2} + (a+1)^{2k+1}$能被 a^2+a+1 整除,那么

$$\begin{aligned} & a^{(k+1)+2} + (a+1)^{2(k+1)+1} \\ &= a^2 \cdot a^{k+1} + (a+1)^2(a+1)^{2k+1} \\ &= a[a^{k+2} + (a+1)^{2k+1}] + (a^2+a+1) \cdot (a+1)^{2k+1}. \end{aligned}$$

因为 $a^{k+2} + (a+1)^{2k+1}$与 a^2+a+1 都能被 a^2+a+1 整除,所以 $a^{(k+1)+2} + (a+1)^{2(k+1)+1}$可被 a^2-a+1 整除,故 $n=k+1$ 时命题成立.

综合(ⅰ)、(ⅱ),可知命题对任何自然数 n 成立.

10. **证明** 设有限集中元素个数为 n,对 n 施行归纳.若 $n=0$,集合为空集,命题显然成立.设 $n=k$ 时,命题成立.当 $n=k+1$ 时,设集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}\}$,$A'=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$.根据归纳假设,$A'$的 2^k 个子集可按题设要求排成一排:$A_1, A_2, \cdots, A_{2^k}$.于是 A 的子集也可以按题设要求以如下方式排成一排:$A_1, A_2, \cdots, A_{2^k}, A_{2^k} \cup \{a_{k+1}\}, A_{2^k-1} \cup \{a_{k+1}\}, \cdots A_1 \cup \{a_{k+1}\}$.故 $n=k+1$ 时,命题成立,综上所述,命题获证.

11. **解**

$$f(1) = 1 - a_1 = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4},$$

$$f(2) = (1-a_1)(1-a_2) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{4}{6},$$

$$f(3) = (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3) = \frac{4}{6} \times \frac{15}{16} = \frac{5}{8},$$

$$f(4)=(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)=\frac{5}{8}\times\frac{24}{25}=\frac{6}{10},$$

猜想 $f(n)=\frac{n+2}{2(n+1)}$.

用数学归纳法证明如下：

(ⅰ) 当 $n=1$ 时，左边 $=f(1)=\frac{3}{4}$，右边 $=\frac{3}{4}$，故 $n=1$ 时猜想成立.

(ⅱ) 假设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$f(k)=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

$$\begin{aligned}f(k+1)&=f(k)(1-a_{k+1})\\&=\frac{k+2}{2(k+1)}\left[1-\frac{1}{(k+2)^2}\right]\\&=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{k^2+4k+3}{(k+2)^2}\\&=\frac{k+3}{2(k+2)}\\&=\frac{(k+1)+2}{2[(k+1)+1]},\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时猜想成立.

综上所述，$f(n)=\frac{n+2}{2(n+1)}$.

另解　$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$

$$\begin{aligned}&=\prod_{k=1}^{n}\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\\&=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdots\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\\&=\frac{n+2}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

12. 证明　若存在实数 a、b 符合题意，那么

$$f(1)=\frac{1}{a\left(-\frac{3}{2}\right)^1-b}+1=2,$$

即　$$-\frac{3}{2}a-b=1. \qquad ①$$

$$f(2)=\frac{1}{a\left(-\frac{3}{2}\right)^2-b}+1=\frac{4-f(1)}{f(1)+2}=\frac{4-2}{2+2}=\frac{1}{2},$$

即
$$9a-4b=-8. \tag{②}$$

由①和②联立得到 $a=-\frac{4}{5}, b=\frac{1}{5}$.

下面用数学归纳法证明

$$f(n)=\frac{1}{(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^n-\frac{1}{5}}+1 \tag{③}$$

对任意的 n 值成立.

(ⅰ) 当 $n=1$ 时,

$$f(1)=\frac{1}{(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})-\frac{1}{5}}+1=2,$$

③式成立.

(ⅱ) 假设 $n=k$ 时③成立,即 $f(k)=\frac{1}{(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^k-\frac{1}{5}}+1$,那么

$$\begin{aligned}
f(k+1)&=\frac{4-f(k)}{f(k)+2}\\
&=\frac{4-\frac{1}{(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^k-\frac{1}{5}}-1}{\frac{1}{(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^k-\frac{1}{5}}+1+2}\\
&=\frac{3\cdot(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^k-\frac{8}{5}}{3\cdot(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^k+\frac{2}{5}}\\
&=\frac{15\cdot(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^k-8}{15\cdot(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^k+2}\\
&=\frac{-10}{15\cdot(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^k+2}+1\\
&=\frac{1}{(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^{k+1}-\frac{1}{5}}+1.
\end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 时,①式也成立.

根据(ⅰ)(ⅱ)可知存在实数 $a=-\frac{4}{5}, b=\frac{1}{5}$ 对任意的 n 值($n\in \mathbf{N}$)$f(n)=\frac{1}{a(-\frac{3}{2})^n-b}+1$ 成立.

13. **证明** 只须证明下述命题:对任何自然数 n,都存在自然数 a,b,使

$$\begin{cases}(1-\sqrt{2})^n=\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2}, & ①\\ a^2-2b^2=(-1)^n. & ②\end{cases}$$

事实上,当 n 为偶数时,只要取 $m=a^2$;当 n 为奇数时,只要取 $m=2b^2$,即可由①,②知命题成立.

当 $n=1$ 时,取 $a=b=1$,即知①,②成立.假设 $n=k$ 时,命题成立,那么 $n=k+1$ 时,由于

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{2})^{k+1}&=(1-\sqrt{2})^k(1-\sqrt{2})\\&=(\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2})(1-\sqrt{2})\\&=(a+2b)-(a+b)\sqrt{2}\\&=\sqrt{(a+2b)^2}-\sqrt{2(a+b)^2}.\end{aligned}$$

取 $a_1=a+2b, b_1=a+b$,则 $a_1,b_1\in \mathbf{N}$,且

$$\begin{aligned}a_1^2-2b_1^2&=(a+2b)^2-2(a+b)^2\\&=-a^2+2b^2\\&=-(a^2-2b^2)\\&=(-1)^{k+1}.\end{aligned}$$

知 a,b 也满足③,a_1,b_1 即为所求.$n=k+1$ 时,①、②成立.

综上所述知,①,②对一切自然数都成立,因此命题成立.

练习二

1. **解** 依题设,$2a_5=a_3+a_6$,即

$$2a_3q^2=a_3+a_3q^3,$$

因 $a_3>0$,故有

$$q^3-2q^2+1=0,$$

$$\Leftrightarrow(q-1)(q^2-q-1)=0,$$

注意到 $q>0, q\neq 1$，故 $q=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 于是$\frac{a^3+a^5}{a^4+a^6}=\frac{a^3(1+q^2)}{a_3(q+q^3)}=\frac{1}{q}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 选(A).

2. **解** 依题设，$S_n=n^2$，故 $a_1=S_1=1^2=1$，当 $n\geqslant 2, n\in \mathrm{N}$ 时，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

这说明数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，又

$$\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{2}(n\geqslant 2),$$

于是，

$$\text{原式}=\frac{1}{2}[(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})$$

$$+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+\cdots+(\sqrt{a_{999}}-\sqrt{a_{998}})]$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{999}}-\sqrt{a_1})$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{1+(999-1)\cdot 2}-1)$$

$$=\frac{\sqrt{1997}-1}{2}.$$

选(B).

3. **解** 当且仅当 $q\in(-1,0)\cup(0,1]$时，$\lim_{n\to\infty}(\frac{a_1}{1+q}-q^n)$存在，所以$0<|q|<1$时 $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_1}{1+q}-q^n)=\frac{a_1}{1+q}=\frac{1}{2}$，可得 $q=2a_1-1$. 于是 $a\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$. 当 $q=1$ 时，由$\frac{a_1}{1+1}-1=\frac{1}{2}$得 $a_1=3$，选(D).

4. **解** 依题设，有

$$\begin{cases} S_m=\frac{a_1(1-q^m)}{1-q}, \\ S_{2m}=\frac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}, \end{cases}$$

故

$$\frac{S_m}{S_{2m}}=\frac{1-q^m}{1-q^{2m}}=\frac{1}{1+q^m},$$

即$\frac{16}{64}=\frac{1}{1+q^m}$，解得 $q^m=3$. 于是

$$
\begin{aligned}
S_{3m} &= \frac{a_1(1-q^{3m})}{1-q} \\
&= \frac{a_1(1-q^m)}{1-q}(1+q^m+q^{2m}) \\
&= S_m(1+q^m+q^{2m}) \\
&= 16(1+3+9) = 208.
\end{aligned}
$$

5. **解** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是公差为 4 的等数差数列，依题设有

$$a_1^2 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant 100,$$

即
$$a_1^2 + (n-1)(a_1+4) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \times 4 \leqslant 100,$$

化简得
$$a_1^2 + (n-1)a_1 + (2n^2 - 2n - 100) \leqslant 0.$$

$$\Delta = (n-1)^2 - 4(2n^2 - 2n - 100) \geqslant 0,$$

即 $7n^2 - 6n - 401 \leqslant 0$，解得 $\frac{1}{7}(3-\sqrt{2816}) \leqslant n \leqslant \frac{1}{7}(3+\sqrt{2816})$。因 $8 < \frac{1}{7}(3+\sqrt{2816}) < 9$，所以 n 只可能是 8。又数列：$-4,0,4,\cdots,24$ 满足题设条件，故 $n=8$ 为所求。

6. **解** 因 $\{\sin a_n\}$ 是等比数列，故 $q = \frac{\sin a_2}{\sin a_1} = \frac{\sin a_3}{\sin a_2}$，即 $\sin^2 a_2 = \sin a_1 \cdot \sin a_3$，

有 $\quad -\frac{1}{2}[\cos(a_1 - a_2) - \cos 0] = -\frac{1}{2}[\cos(a_1 + a_3) - \cos(a_3 - a_1)]$. $\qquad$ ①

又因 $\{a_n\}$ 是等差数列，有 $2a_2 = a_1 + a_3$，$a_3 - a_1 = 2d$，由①可得 $\cos 2d = 1$，所以 $d = k\pi (k \in Z)$。于是，

$$q = \frac{\sin a_2}{\sin a_1} = \frac{\sin(a_1 + k\pi)}{\sin a_1} = (-1)^k.$$

故等比数列 $\{\sin a_n\}$ 的公比为 $q = \pm 1$.

7. **解** 依题设，$b_1 b_2 b_3 = \frac{1}{8}$，即 $(\frac{1}{2})^{a_1+a_2+a_3} = (\frac{1}{2})^3$。因 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $2a_2 = a_1 + a_3$，解得 $a_2 = 1$。于是，$a_1 = 1 - d$，$a_3 = 1 + d$。又 $(\frac{1}{2})^{a_1} + (\frac{1}{2})^{a_2} + (\frac{1}{2})^{a_3} = \frac{21}{8}$，所以 $(\frac{1}{2})^{a_1} + (\frac{1}{2})^{a_3} = \frac{21}{8} - \frac{1}{2}$，即 $(\frac{1}{2})^{1-d} + (\frac{1}{2})^{1+d} = \frac{17}{8}$，化简得 $4\cdot(2^d)^2 - 17\cdot 2^d + 4 = 0$，解得 $d = -2$ 或 $d = 2$。当 $d = -2$ 时，$a_1 = 3$，$a_n = 3(n-1)(-2) = 5 - 2n$；当 $d = 2$ 时，$a_1 = -1$，$a_n = -1 + (n-1) \times 2 = 2n - 3$.

8. **证明** 依题设，有 $2b = a + c$，根据正弦定理，可得

$$2\sin B = \sin A + \sin C$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}.$$

因 $\cos\frac{B}{2} = \sin\frac{A+C}{2}$,故 $2\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} &= \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \\ &= \frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A+C}{2}}{-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+C}{2} - \cos\frac{A-C}{2}\right)} \\ &= \frac{-2\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2} - 2\sin\frac{B}{2}} = 2\cot\frac{B}{2}.\end{aligned}$$

所以,$\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ 成等差数列.

9. **解** 设五项为 $aq^{-2}, aq^{-1}, a, aq, aq^2$,它们的和为 211 且各项为正整数,显然 q 是有理数,设 $q = \frac{c}{d}$(c, d 互质),于是 $a = kc^2d^2$. 由 211 是质数知 $k = 1$,有 $d^4 + d^3c + d^2c^2 + dc^3 + c^4 = 211$,$c, d$ 都只能小于 4,c, d 不能是 1,否则,若有一个为 1,那么另一个满足 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 211$,无小于 4 的正整数解,所以 $q = \frac{2}{3}$ 或 $q = \frac{3}{2}$,$2^4 + 3\cdot2^3 + 3^2\cdot2^2 + 3^3\cdot2 + 3^4 = 211$. 所求 $S = 2^4 + 3^2\cdot2^2 + 3^4 = 133$.

10. **证明** 不妨设公差为 d,$d \in N$,有 $a_{N+S} = a_N - sd$. 可取 $S = a_N > 1$,则 $a_{N+S} = a_N(1 + d)$ 为合数.

11. **解** 若存在数列满足条件,设其首项为 $\frac{1}{2^k}$,公比 $\frac{1}{2^t}$ ($t \geq 1$). 于是 $\frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2^t}}$,即 $2^k = 2^{k-t} + 2^2 + 1$,$k = 0$ 时等式不成立,$k \neq 0$ 时,2^{k-t} 为奇数,即 $k = t$. 此时 $2^k = 6$,不可能.

12. **解** (1) 厚度为 α 的带钢经过减薄率为 r_o 的轧辊后厚度为 $\alpha(1 - r_o)^n$,为使输出带钢厚度不超过 β,冷轧机的轧辊数(以对为单位)应满足 $\alpha(1 - r_o)^n$

$\leqslant\beta$.即$(1-r_o)^n\leqslant\frac{\beta}{\alpha}$.由于$(1-r_o)^n>0,\frac{\beta}{\alpha}>0$,对上式两端取对数,得 $n\lg(1-r_o)\leqslant\lg\frac{\beta}{\alpha}$,由于 $\lg(1-r_o)<0$,所以 $n\geqslant\frac{\lg\beta-\lg\alpha}{\lg(1-r_o)}$的整数对轧辊.

(2) 第3对轧辊出口疵点间距为轧辊周长,在此处出口的的两疵点间带钢体积与冷轧机出口处两疵点间带钢体积相等,因宽度不变,有 $1600=L_3\cdot(1-0.2)$,所以 $L_3=\frac{1600}{0.8}=2000(\text{mm})$.同理 $L_2=\frac{l_3}{0.8}=2500(\text{mm})$, $L_1=\frac{L_2}{0.8}=3125(\text{mm})$,填表如下.

轧辊序号 k	1	2	3	4
底点间距 $l_k(\text{mm})$	3125	2500	2000	1600

13. **解** (1) 因 $b_1=a_1$,数列$\{b_n\}$是公差 $d\neq0$ 的等差数列,所以 $b_n=b_1+(n-1)d$, $b_{n-1}=b_1+(n-2)d(n\geqslant2)$.又

$$a_1+2a_2+\cdots+na_n=\frac{1}{2}n(n+1)b_n,$$

$$a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}=\frac{1}{2}n(n-1)b_{n-1}.$$

两式相减得

$$a_n=\frac{1}{2}[(n+1)b_n-(n-1)b_{n-1}],$$

即

$$a_n=\frac{1}{2}\{(n+1)[b_1+(n-1)d]-(n-1)[b_1+(n-2)d]\}$$

$$=b_1+\frac{3}{2}(n-1)d\quad(n\geqslant2).$$

$n=1$ 时上式也成立.所以 $a_n=b_1+(n-1)\cdot\frac{3d}{2}$,数列$\{a_n\}$是以$\frac{3d}{2}$为公差的等差数列.

(2) 依题设,$a_1=b_1\neq0$,又 $d\neq0$,故 $\lim\frac{b_n}{a_n}=\lim\frac{b_1+(n-1)d}{b_1+\frac{3}{2}(n-1)d}=\frac{2}{3}$.

14. **证明** 先证必要性.设数列$\{a_n\}$成等差数列,公差为 d,则

$$\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}-a_n}$$

$$=\frac{n-1}{-d}=\frac{n-1}{\frac{a_1-a_n}{n-1}}=\frac{(n-1)^2}{a_1-a_n},$$

必要性获证.

再证充分性. $n=3$ 时,由 $\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}=\frac{4}{a_1-a_3}$

得 $$(a_1-a_3)^2=4(a_1-a_2)(a_2-a_3),$$

即 $$[(a_1-a_2)+a_2-a_3)]^2=4(a_1-a_2)(a_2-a_3)$$

$$\Leftrightarrow[(a_1-a_2)-(a_2-a_3)]^2=0.$$

故 $a_1-a_2=a_2-a_3$, a_1,a_2,a_3 成等差数列.

假设 $n=k$ 时命题成立,即 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 成等差数列,因公差为 d,且

$$\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}-a_n}=\frac{(k-1)^2}{a_1-a_n}=\frac{k-1}{-d}.$$

则 $n=k+1$ 时,由

$$\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}-a_k}+\frac{1}{a_k-a_{k+1}}=\frac{(k+1-1)^2}{a_1-a_{k+1}}.$$

得 $$\frac{k-1}{-a}+\frac{1}{a_1+(k-1)d-a_{k+1}}=\frac{k^2}{a_1-a_{k+1}}.$$

化简整理得

$$(k-1)(a_1-a_{k+1})^2+d(k-1)\cdot 2k(a_1-a_{k+1})+k^2(k-1)d^2=0.$$

因 $k-1>0$,故

$$(a_1-a_{k+1})^2+2kd(a_1-a_{k+1})+k^2d^2=0,$$

即 $[(a_1-a_{k+1})+kd]^2=0$,所以 $a_{k+1}=a_1+[(k+1)-1]d$. $a_1,a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}$ 成等差数列.综上所述,充分性获证.

练习三

1. **解** 依题设,有 $b+d>b+c>a+d$,故 $b>a$,又 $a-c=d-b<c-a$,可得 $a<c$, $d>b$.故 $b>d>c>a$,选(C).

2. **解** 因 $a<b<c<d$,故

$$y-x=ab+cd-ac-bd=(a-d)(b-c)>0,$$

$$z-y=ac+bd-ad-bc=(a-b)(c-d)>0.$$

所以, $x<y<z$.选(A).

3. **解** $B>A$, $C>D$ 显然,因 $a\in(0,\frac{1}{2})$,故 $A-D=1-a^2-\frac{1}{1+a}=\frac{a}{1+a}$

$(1-a-a^2)=\frac{a}{1+a}[\frac{5}{4}-(a+\frac{1}{2})^2]>0$,又 $C-B=\frac{1}{1-a}-(1+a^2)=\frac{1-(1-a)(1+a^2)}{1-a}=\frac{a}{1-a}(a^2-a+1)>0$.故选(A).

4. **解** 当 $a,b,c\in R^+$ 且 $a+b=c$ 时,$0<\frac{a}{c}<1,0<\frac{b}{c}<1$,有$(\frac{a}{c})^{\frac{2}{3}}+(\frac{b}{c})^{\frac{2}{3}}>\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}=1$.故①正确.

当 $a+b+c=1$ 时,$a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}=a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}(a+b+c)^2$
$=\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=\frac{1}{3}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0$,故②正确.

当 $c>a>b>0$ 时,$c-b>c-a>0$,有$\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}$,又 $a>b>0$.
故$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$,③正确.

当 $2a>b+1$ 时,$\Delta=4a^2-4b>4a^2+4(1-2a)=4(a-1)^2\geqslant 0$.故方程有实根,而 $a=b=1$ 时方程为 $x^2+2x+1=0$ 有实根但并不满足 $2a>b+1$.因此,$a,b\in R$,$2a>b+1$ 是方程有实根的充分但非必要条件,④不正确,选(C).

5. **证明** $2(a^4+b^4)\geqslant(a^2+b^2)^2,2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$,又 $a+b=1$,故

$$a^4+b^4\geqslant\frac{1}{2}[2(\frac{a+b}{2})^2]^2=\frac{1}{8}.$$

6. **证明** 因 $0<a<1,a^x>0,a^y>0$,故有

$$a^x+a^y\geqslant 2\sqrt{a^xa^y}=2a^{\frac{x+y}{2}},$$

$$\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a(2a^{\frac{x+y}{2}}).\qquad ①$$

又 $$\log_a(2a^{\frac{x+y}{2}})=\log_a 2+\frac{x+y}{2},\qquad ②$$

且因 $$x^2+y=0,$$

有 $$\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}(x-x^2)=\frac{1}{2}[-x(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}]\leqslant\frac{1}{8}.\qquad ③$$

由①,②,③即得所要证不等式.

7. **证明** 只须证

$$(1+a^n)(n-1)\geqslant 2(a+a^2+\cdots+a^{n-1}),$$

这可由 $$1+a^n-a^k-a^{n-k}=(1-a^k)(1-a^{n-k})\geqslant 0,$$

取 $k=1,2,\cdots,n-1$ 相加得到.

8. **证明** 先证 $a^ab^b \geqslant a^bb^a$. 不妨设 $\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=T$. 则 $a\lg^a+b\lg^b-b\lg^a-a\lg^b=\lg T$. 即 $(a-b)(\lg a-\lg b)=\lg T$. 由于 $a-b$ 与 $\lg a-\lg b$ 同号, 所以 $\lg T \geqslant 0$, 即 $T \geqslant 1$. 故 $a^ab^b \geqslant a^bb^a$. 同理 $b^bc^c \geqslant b^cc^b$, $c^ca^a \geqslant c^aa^c$. 三式相乘有 $a^{2a}b^{2b}c^{2c} \geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$, 进而有 $a^{3a}b^{3b}c^{3c} \geqslant (abc)^{a+b+c}$. 所以, $a^ab^bc^a \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

9. **证明** 不妨设 $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant r$, 依题设, $\dfrac{\sqrt{6}}{3} \leqslant r \leqslant \sqrt{2}$, 则

$$\begin{aligned}
&p+q+r-pqr=p+q-\frac{1}{2}(p+q)^2r+\frac{1}{2}(p^2+q^2)r+r\\
&=-\frac{r}{2}\left(p+q-\frac{1}{r}\right)^2+\frac{1}{2r}+2r-\frac{r^3}{2}\\
&\leqslant \frac{1}{2r}+2r-\frac{r^3}{2}\\
&=-\frac{1}{2r}(r^4-4r^2+4r-1)+2\\
&=-\frac{1}{2r}(r-1)^2(r^2+2r-1)+2 \leqslant 2.
\end{aligned}$$

当 $r=q=1$, $p=0$ 时可取等号.

10. **证明** 当 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 时, 由 $(x+y)^2 \geqslant 4xy$, 可得

$$\frac{xy}{x+y} \leqslant \frac{1}{4}(x+y). \qquad ①$$

对于 $a_i \in \mathbf{R}^+$, $b_i \in \mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 由①得

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k},$$

所以
$$\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

即
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

11. **证明** $n=3$ 时, $3^4>4^3$, 假设 $k^{k+1}>(k+1)^k$, 则

$$\frac{(k+1)^{k+2}}{(k+2)^{k+1}}=(k+1)\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}>(k+1)\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}=\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}>1,$$

有 $(k+1)^{k+2}>(k+2)^{k+1}$.

12. **证明** (ⅰ) $n=1$ 时, 不等式显然成立. (ⅱ) 假设 $n=k$ 时不等式成立,

即

$$\frac{1+a^2+\cdots+a^{2(k+1)}}{a+a^3+\cdots+a^{2k+1}}+\frac{a+a^3+\cdots+a^{2k-1}}{1+a^2+\cdots+a^{2k}}$$

$$=\frac{(1+a^2)(1+a^2+\cdots+a^{2k})}{a(1+a^2+\cdots+a^{2k})}$$

$$=\frac{1+a^2}{a}>2,$$

故

$$\frac{1+a^2+\cdots+a^{2(k+1)}}{a+a^3+\cdots+a^{2k+1}}$$

$$>2-\frac{a+a^3+\cdots+a^{2k-1}}{1+a^2+\cdots+a^{2k}}$$

$$>2-\frac{k}{k+1}=\frac{(k+1)+1}{k+1}.$$

当 $n=k+1$ 时,不等式成立.

综合(ⅰ),(ⅱ),不等式对一切自然数 n 成立.

13. **证明** (ⅰ)$n=1$ 时,由 $0\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant x_1<1$,知

$$(1+x_1)^t\leqslant 1+x_1<1+x_1^t$$

命题成立.

(ⅱ)假设 $n=k$ 时命题成立,则当 $n=k+1$ 时,

$$(1+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1})^t$$

$$=(1+\frac{x_{k+1}}{1+x_1+\cdots+x_k})^t(1+x_1+\cdots+x_k)^t$$

$$\leqslant(1+\frac{x_{k+1}}{1+x_1+\cdots+x_k})(1+x_1+\cdots+x_k)^t$$

$$=(1+x_1+\cdots+x_k)^t+x_{k+1}(1+x_1+\cdots+x_k)^{t-1}$$

$$\leqslant 1+x_1^t+\cdots+k^{t-1}x_k^t+x_{k+1}[(k+1)(x_{k+1})]^{t-1}$$

$$=1+x_1^t+\cdots+k^{t-1}x_k^t+(k+1)^{t-1}x_{k+1}^t$$

所以,当 $n=k+1$ 时不等式成立.

综上所述,命题获证.

14. **证明** 假设 $b^2-4ac>0$,由 $a,b,c\in Z$,知 $b^2-4ac\geqslant 1$,方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根 x_1、x_2 满足 $|x_1-x_2|=\sqrt{b^2-4ac}\geqslant 1$.所以存在整数 x_0,使 $x_1\leqslant x_0\leqslant x_2$,且 $ax_0^2+b_0+c\leqslant 0$,与题设矛盾.

15. **证明** 设 $m=[\frac{a}{7}],n=[\frac{a}{5}],p=[\frac{a}{3}]$,有

$$a = 7m + r_1 \quad (o \leqslant r_1 \leqslant 6), \qquad ①$$

$$a = 5n + r_2 \quad (0 \leqslant r_2 \leqslant 4), \qquad ②$$

$$a = 3p + r_3 \quad (0 \leqslant r_3 \leqslant 2), \qquad ③$$

由①×15+②×21−③×35 得

$$a = 105(m+n-p)+15r_1+21r_2-35r_3.$$

若 $m+n-p\leqslant 2$,则

$$a \leqslant 105\times 2+15\times 6+21\times 4-35\times 0 = 384$$

与 $a\geqslant 385$ 相矛盾.故 $m+n-p>2$,不等式获证.

练习四

1. **证明** 依题设,有

$$a^n - a - (a-1) = 0,$$

即 $$(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a-1)=0.$$

因 $a\neq 1$,故 $$a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a-1=0.$$

于是 $$1 = a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a$$

$$> (n-1)\sqrt[n-1]{a^{n-1}a^{n-2}\cdots a} = (n-1)\sqrt{a^n},$$

故 $$a<(n-1)^{-\frac{2}{n}}.$$

2. **证明** 欲证不等式等价于

$$\frac{\lg(n+1)}{\lg n} > \frac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)},$$

即 $$\lg n\cdot\lg(n+2) < [\lg(n+1)]^2. \qquad ①$$

因 $$\lg n\cdot\lg(n+2) < [\frac{\lg n+\lg(n+2)}{2}]^2 = \frac{1}{4}\{\lg[n(n+2)]\}^2, \qquad ②$$

且 $$\lg[n(n+2)] < \lg(n+1)^2 = 2\lg(n+1), \qquad ③$$

所以 $$\lg n\cdot\lg(n+2) < \frac{1}{4}[2\lg(n+1)]^2 = [\lg(n+1)]^2,$$

①式成立.

3. **证明** 记 $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$,则

$$A \cdot (2n+1) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2n+1}{2n} > 1,$$

得 $A > \frac{1}{2n+1}$，又

$$A^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

故 $A < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，

4. **证明**

$$\frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n}{x_n+x_1}$$

$$\geqslant \frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n} + \frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_1+x_2+\cdots+x_n} + \frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n} = 1,$$

又

$$\frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n}{x_n+x_1}$$

$$= \left(1 - \frac{x_2}{x_1+x_2}\right) + \left(1 - \frac{x_3}{x_2+x_3}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{x_n}{x_{n-1}x_n}\right) + \left(1 - \frac{x_1}{x_n+x_1}\right)$$

$$= n - \left(\frac{x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_3}{x_2-x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_1}{x_n+x_1}\right)$$

$$\leqslant n - \left(\frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n} + \frac{x_3}{x_1+x_2+\cdots+x_n} + \cdots + \frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots-x_n} + \frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right)$$

$$= n - 1$$

5. **证明** 因 $a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0$，故

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leqslant \frac{a}{2a} + \frac{b}{2b} + \frac{c}{2c} = \frac{3}{2}.$$

设 $x=1+a, y=1+b, z=1+c$,则

$$x+y+z=3+(a+b+c)\leqslant 6.$$

于是
$$1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\leqslant\frac{6}{x},$$

$$1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}\leqslant\frac{6}{y},$$

$$1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\leqslant\frac{6}{z},$$

三式相加可得

$$3+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\leqslant\frac{6}{x}+\frac{6}{y}+\frac{6}{z}.$$

注意到 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2, \frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geqslant 2, \frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geqslant 2,$

代入上式即得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{3}{2}$,所以 $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geqslant\frac{3}{2}$.

6. **证明** 设 $a=4+\delta(\delta>0)$,则

$$\frac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}-1=\frac{\lg(4+\delta)-\lg 4}{\lg\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{4}\right)}{\lg\frac{4}{3}}=\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{4}\right)^2}{\lg\frac{16}{9}}$$

$$=\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{16}\right)}{\lg\frac{16}{9}},$$

且
$$\frac{\lg(a-2)}{\lg 2}-1=\frac{\lg(2+\delta)-\lg 2}{\lg 2}=\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{\lg 2}.$$

显见
$$\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{16}\right)}{\lg\frac{16}{9}}>\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{\lg 2},$$

所以
$$\frac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}>\frac{\lg(a-2)}{\lg 2}.$$

7. **证明** 设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(r\geqslant 0)$,令 $p=\frac{x^ly^m}{1+(x^2+y^2)^n}$,则

$$p=\frac{r^{l+m}\cos^{l}\theta\sin^{m}\theta}{1+r^{2n}(\cos^{2}\theta+\sin^{2}\theta)}\leqslant\frac{r^{l+m}}{1+r^{2n}}.$$

(ⅰ) 当 $r\geqslant1$ 时，$r^{l+m}\leqslant r^{2n}<1+r^{2n}$，有 $p<1$；

(ⅱ) 当 $0\leqslant r<1$ 时，$r^{l+m}<1$，$1+r^{2n}>1$，有 $p<1$.

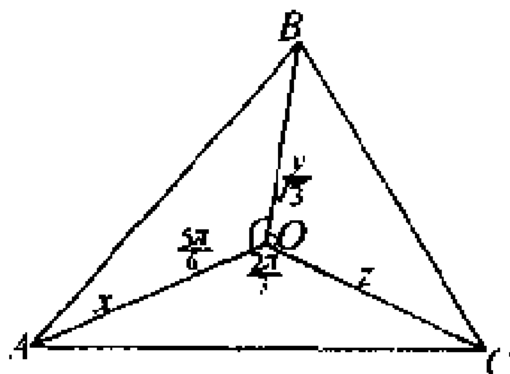
综上所述，$p<1$.

8. **证明** 不等式左边视作 a 的一次函数.

$$f(a)=(b+c)a+bc+1\quad(|a|<1)$$

或常量函数($b+c=0$). 因 $f(1)=(b+1)-(c+1)>0$，$f(-1)=(b-1)(c-1)>0$，$f(a)$的图象是一线段，有 $f(-1)\leqslant f(a)\leqslant f(1)$或 $f(-1)\geqslant f(a)\geqslant f(1)$，故不等式得证.

9. **证明** 以$\sqrt{x^{2}-xy+\frac{y^{2}}{3}}$，$\sqrt{\frac{y^{2}}{3}+z^{2}}$，$\sqrt{z^{2}+xz+x^{2}}$为边长构成如图所示的$\triangle ABC$，因 $AB+BC>CA$，即得证所要证的不等式.



(第 9 题)

10. **证明** 不等式等价于证$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2}+\left(b+\frac{1}{b}\right)^{2}\geqslant\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^{2}$. 左端表点 $A(a,b)$到 $B\left(-\frac{1}{a},-\frac{1}{b}\right)$的距离，注意到 $a+b=1$，说明 A 点在直线 $x+y=1$ 上，因 A、B 两点距离大于等于点 B 到直线 $x+y=1$ 的距离，所以

$$|AB|\geqslant\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{a+b}{ab}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{ab}\right).$$

又由 $a+b=1$ 易得$\frac{1}{ab}\geqslant4$，所以$|AB|\geqslant\frac{5}{\sqrt{2}}$成立，命题获证.

11. **证明** 构造函数 $f(x)=\frac{a^{x}-b^{x}}{a^{x}+b^{x}}(a>b>0)$，则 $f(x)=1-\frac{2b^{x}}{a^{x}+b^{x}}=1-\frac{2}{\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+1}$，任取 $x_1<x_2$，有

$$0<\left(\frac{a}{b}\right)^{x_1}+1<\left(\frac{a}{b}\right)^{x_2}+1,$$

$$\frac{2}{\left(\frac{a}{b}\right)^{x_1}+1}>\frac{2}{\left(\frac{a}{b}\right)^{x_2}+1},$$

$$1-\frac{2}{(\frac{a}{b})^{x_1}+1}<1-\frac{2}{(\frac{a}{b})^{x_2}+1},$$

故 $f(x)$ 在 R 上为增函数，有 $f(\sqrt{5})>f(2)$，即得欲证不等式.

12. **证明** 构造二次函数 $f(x)=a_1x^2+2b_1x+c_1$ 与 $g(x)=a_2x^2+2b_2x+c_2$. 因 $a_i>0, a_ic_i\geqslant b_i^2(i=1,2)$，故有 $f(x)\geqslant 0, g(x)\geqslant 0$，

即
$$a_1x^2+2b_1x+c_1\geqslant 0, \quad ①$$
$$a_2x^2+2b_2x+c_1\geqslant 0. \quad ②$$

对 $x\in\mathrm{R}$ 恒成立.

将①,②相加，对任意实数 x 都有
$$(a_1+a_2)x^2+2(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)\geqslant 0.$$

因 $a_1+a_2>0$，故
$$4(b_1+b_2)^2-4(a_1+a_2)(c_1+c_2)\leqslant 0$$

即
$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)\geqslant(b_1+b_2)^2.$$

13. **证明** 令 $x=\tan\alpha, y=\tan\beta, z=\tan\gamma$，且 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$，依题设，有 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$. 进而可得 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，根据柯西不等式，知
$$\begin{aligned}2&=(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\\&\geqslant(\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma)^2\\&=\frac{1}{4}(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)^2,\end{aligned}$$

于是
$$\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma\leqslant 2\sqrt{2}.$$

根据万能公式，由①得
$$\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\frac{\tan\beta}{1+\tan^2\beta}+\frac{\tan\gamma}{1+\tan^2\gamma}\leqslant\sqrt{2},$$

即得欲证不等式.

14. **证明** 设 $x_1=k(x_2+x_3+x_4)$，依题设有 $\frac{1}{3}\leqslant k\leqslant 1, x_3x_4\geqslant 4$. 原不等式等价于
$$(1+k)^2(x_2+x_3+x_4)^2\leqslant 4kx_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4), \quad ①$$

不难证明函数 $f(k)=k+\frac{1}{k}(\frac{1}{3}\leqslant k\leqslant 1)$ 是减函数，从而

$$\frac{(1+k)^2}{4k}(x_2+x_3+x_4)=\frac{k+\frac{1}{k}+2}{4}(x_2+x_3+x_4)$$

$$\leqslant\frac{3+\frac{1}{3}+2}{4}\cdot 3x_2=4x_2\leqslant x_2x_3x_4$$

故①式成立，证得所要证的不等式.

15. **证明**

$$\frac{x_i^2}{x_i^2+x_{i+1}x_{i+2}}=1-\frac{x_{i+1}x_{i+2}}{x_i^2+x_{i+1}x_{i+2}}$$

$$=1-\frac{1}{1+\frac{x_i^2}{x_{i+1}x_{i+2}}}\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

这里 $$x_{n+1}=x_1, x_{n+2}=x_2.$$

令 $y_i=\frac{x_i^2}{x_{i+1}x_{i+2}}$ 有 $y_i>0$，及

$$y_1y_2\cdots y_n=1, \tag{②}$$

于是不等式①的左端即为

$$n-\left(\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}+\cdots+\frac{1}{1+y_n}\right),$$

现只须证明 $$\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}+\cdots+\frac{1}{1+y_n}\geqslant 1 \tag{③}$$

由③知，必存在 $0<y_i\cdot y_j\leqslant 1(i\neq j)$，从而有

$$\frac{1}{1+y_i}+\frac{1}{1+y_j}=\frac{2+y_i+y_j}{(1+y_i)(1+y_j)}=\frac{1+y_i+y_j+1}{1+y_i+y_j+y_iy_j}\geqslant 1 \tag{④}$$

根据④知③成立，故不等式①得证.

练习五

1. **证明** $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$$=(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

$$+\frac{1}{2}(2ab+2ac+2bc)$$

$$=(a^2+bc)+(b^2+ca)+(c^2+ab)$$

$$+\frac{1}{2}[(ab+ca)+(bc+ab)+(bc+ca)]$$

$$\geqslant 2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ca}-2c\sqrt{ba}+\frac{1}{2}$$

$$[2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ca}+2c\sqrt{ab}]$$

$$=3(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab})$$

上述不等式两端同除以 3 即得所要证明不等式.

2. **证明** 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$,若 $a\geqslant b+c$,则不等式得证,若 $a<b+c$,则

$$a=\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}\geqslant\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}.$$

同理 $$b\geqslant\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)},$$

$$c\geqslant\sqrt{(c+a-b)(b+c-a)}.$$

将三式相乘即可.

3. **证明** 若 x,y,z 中有一为 0,易证.否则,$x^3+y^3+z^3=3xyz$,左端为 $54x^2y^2z^2$,且 x,y,z 中必有两个同号.设为 x,y,则

$$右端=[(x^2+y^2)+(x^2+xy)+(y^3+xy)]^3$$

$$\geqslant 3^3\cdot 2xy\cdot x(x+y)\cdot y(x+y)=54x^2y^3z^2.$$

4. **证明** ①式可变为

$$(1+n)^{\frac{1}{n}}-1<\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n},$$

即 $$(1+n)^{\frac{1}{n}}<\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+n}{n}. \quad ②$$

因 $$\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+n}{n}$$

$$=\frac{(1+1)+(\frac{1}{2}+1)+\cdots+(\frac{1}{n}+1)}{n}$$

$$=\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}}{n}$$

$$>\sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}}.$$

$$= \sqrt[n]{n+1},$$

所以,不等式②成立,命题获证.

5. **证明** 只须考虑 $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$.

$$xy + 2yz + 2xz$$
$$\leqslant \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \lambda y^2 + \frac{1}{\lambda}z^2 + \frac{1}{\lambda}z^2 + \lambda x^2$$
$$= (\frac{1}{2} + \lambda)x^2 + (\frac{1}{2} + \lambda)y^2 + \frac{2}{\lambda}z^2. \qquad ①$$

取 $\frac{1}{2} + \lambda = \frac{2}{\lambda}$,得 $\lambda = \frac{1}{4}(\sqrt{33} - 1)$代人①即可.

6. **证明** 根据柯西不等式,有

$$[(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)]$$
$$[\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n}]$$
$$\geqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2.$$

于是
$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n}$$
$$\geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)}$$
$$= \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}.$$

因 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1$,所以

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

7. **证明** $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = [(x_1 + x_2) + x_3 + \cdots + x_n]^2$

$$\leqslant (n-1)[(x_1 + x_2)^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2]$$
$$= (n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1x_2),$$

又
$$A < \frac{1}{n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2),$$

所以 $A < 2x_1x_2$.由对称性,知 $A < 2x_ix_j (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$.

8. **证明** 欲证明①式,只须证明

$$2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 a_2})$$

$$\geqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2. \quad ②$$

根据柯西不等式,有

$$[a_1(a_2 + a_3) + (a_2(a_3 + a_4) + \cdots + a_n(a_1 + a_2)]$$
$$\cdot (\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2})$$
$$\geqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2. \quad ③$$

由②,③知,现只须证明

$$2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$
$$\geqslant a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + \cdots + a_{n-1}(a_n + a_1) + a_n(a_1 + a_2).$$

因 $\qquad (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \cdots + (a_n - a_1)^2 \geqslant 0,$

$\qquad (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + \cdots + (a_n - a_2)^2 \geqslant 0,$

故 $\quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1,$

$\quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant a_1a_3 + a_2a_4 + \cdots + a_na_2.$

将上面两式相加可得④,命题获证.

9. **证明** 先证明 $\alpha > 0, \beta > 0$ 时不等式成立.

不妨设 $\qquad 0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,$

则 $\qquad \frac{1}{x_1} \geqslant \frac{1}{x_2} \geqslant \cdots \frac{1}{x_n} > 0,$

于是 $\qquad 0 < x_1^\beta \leqslant x_2^\beta \leqslant \cdots \leqslant x_n^\beta,$

$$(\frac{1}{x_1})^\alpha \geqslant (\frac{1}{x_2})^\alpha \geqslant \cdots (\frac{1}{x_n})^\alpha > 0.$$

根据排序不等式,有

$$x_1^\beta \cdot (\frac{1}{x_1})^\alpha + x_2^\beta \cdot (\frac{1}{x_2})^\alpha + \cdots + x_n^\beta \cdot (\frac{1}{x_n})^\alpha$$
$$\leqslant x_1^\beta(\frac{1}{x_2})^\alpha + x_2^\beta \cdot (\frac{1}{x_3})^\alpha + \cdots + x_n^\beta \cdot (\frac{1}{x_1})^\alpha,$$

即 $$x_1^{\beta-\alpha} + x_2^{\beta-\alpha} + \cdots + x_n^{\beta-\alpha} \leqslant \frac{x_1^\beta}{x_2^\alpha} + \frac{x_2^\beta}{x_3^\alpha} + \cdots + \frac{x_n^\beta}{x_1^\alpha}.$$

同理可证 $\alpha < 0, \beta < 0$ 时不等式成立.

10. **证明** 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则 $a^2 \geqslant b^2 \geqslant c^2$,且

$$\frac{1}{b + c} \geqslant \frac{1}{c + a} \geqslant \frac{1}{a + b},$$

根据排序不等式，有

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}, \quad ①$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{a+b}, \quad ②$$

① + ② 得

$$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\geqslant\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a+b}. \quad ③$$

又 $$(b+c)^2\leqslant 2(b^2+c^2).$$

即 $$\frac{b^2+c^2}{b+c}\geqslant\frac{b+c}{2}.$$

同样$\frac{c^2+a^2}{c+a}\geqslant\frac{c+a}{2}$，$\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b}{2}$，代入③即得

$$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\geqslant a+b+c.$$

即为欲证不等式.

11. **证明** 记 $A_i=a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n(i=1,2,\cdots,n)$，根据排序不等式，我们只须证明以下情形：设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，$A_1\geqslant A_2\geqslant\cdots\geqslant A_n$ 有

$$b_1A_1+b_2A_2+\cdots+b_nA_n\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}} \quad (n\geqslant 2), \quad ①$$

由于 $0\leqslant b_i\leqslant p$，$b_1+b_2+\cdots+b_n=1$，$\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant 1$，所以

$$\begin{aligned}&b_1A_1+b_2A_2+\cdots+b_nA_n\\&\leqslant b_1A_1+(b_2+b_3+\cdots+b_n)A_2\\&=b_1A_1+(1-b_1)A_2. \quad ②\end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned}&pA_1+(1-p)A_2-b_1A_1-(1-b)A_2\\&=p(A_1-A_2)-b_1(A_1-A_2)\\&=(p-b_1)(A_1-A_2)\geqslant 0, \quad ③\end{aligned}$$

由②，③知

$$\begin{aligned}&b_1A_1+b_2A_2+\cdots+b_nA_n\leqslant pA_1+(1-p)A_2\\&\leqslant p(A_1+A_2). \quad ④\end{aligned}$$

由平均值不等式，有

$$\begin{aligned}A_1+A_2&=a_3a_4\cdots a_n(a_1+a_2)\\&\leqslant\left[\frac{1}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right]^{n-1}. \quad ⑤\end{aligned}$$

注意到 $$a_1+a_2+\cdots+a_n=1,\qquad ⑥$$
由④,⑤,⑥即得①,故要证的不等式成立.

12. **证明** $$\begin{aligned}|xy-ab|&=|(xy-ya)+(ya-ab)|\\&\leqslant|xy-ya|+|ya-ab|\\&\leqslant|y(x-a)|+|a(y-b)|\\&=|y|\cdot|x-a|+|a|\cdot|y-b|,\end{aligned}$$
$$|x-a|<\frac{N}{2M},\ |y|<M,\ |y-b|<\frac{N}{2|a|},$$
故 $$|xy-ab|<M\cdot\frac{M}{2M}+|a|\cdot\frac{N}{|a|}=N.$$

13. **证明** 依题设,对 $x\in\mathrm{R}$ 有
$$Ax^2+Bx+C=a_1a_2x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x+b_1b_2.$$
所以 $A=a_1a_2,B=a_1b_2+a_2b_1,C=b_1b_2$,因 $|a_i|\leqslant h_i,|b_i|\leqslant h_i(i=1,2)$,所以 $|A|=|a_1a_2|\leqslant h_1h_2,|C|\leqslant h_1h_2,|B|=|a_1a_2+a_2b_1|\leqslant|a_1b_2|+|a_2b_1|\leqslant 2h_1h_2$ 从而 $H\leqslant 2h_1h_2$.

下面证明左端不等式.

(1) 假设 $|a_1|=h_1,|b_2|=h_2$.

(ⅰ) 当 $|b_1|>\frac{h_1}{2}$ 时, $|C|=|b_1b_2|>\frac{h_1h_2}{2}$;

(ⅱ) 当 $|a_2|>\frac{h_2}{2}$ 时, $|A|=|a_1a_2|>\frac{h_1h_2}{2}$;

(ⅲ) 当 $|b_1|\leqslant\frac{h_1}{2},|a_2|\leqslant\frac{h_2}{2}$ 时,
$$\begin{aligned}|B|&=|a_1b_2+a_2b_1|\geqslant|a_1b_2|-|a_2b_1|\\&\geqslant h_1h_2-\frac{h_1h_2}{4}>\frac{h_1h_2}{2}.\end{aligned}$$
同理可证,当 $|a_2|=h_2,|b_1|=h_1$ 时左端不等式成立.

(2) 假设 $|a_1|=h,|a_2|=h_2$,则
$$H\geqslant|A|=|a_1a_2|=h_1h_2>\frac{h_1h_2}{2}.$$
同理, $|b_1|=h_1,|b_2|=h_2$ 时左端不等式成立.

综上所述,所要证的不等式成立.

14. **证明** 假若对于属于区间 $[0,1]$ 的任意 x,y 均有

$$|xy-f(x)-g(y)|<\frac{1}{4},$$

则
$$|0\times 0-f(0)-g(0)|<\frac{1}{4},$$

$$|1\times 0-f(1)-g(0)|<\frac{1}{4},$$

$$|0\times 1-f(0)-g(1)|<\frac{1}{4},$$

$$|1\times 1-f(1)-g(1)|<\frac{1}{4}.$$

于是
$$\begin{aligned}&|[0-f(0)-g(0)]-[0-f(1)-g(0)]\\&\quad-[0-f(0)-g(1)]+[1-f(1)-g(1)]|\\&\leqslant|0-f(0)-g(0)|+|0-f(1)-g(0)|\\&\quad+|0-f(0)-g(1)|+|1-f(1)-g(1)|\\&<\frac{1}{4}\times 4=1.\end{aligned}$$

但上式左端值为1,导致矛盾,故命题获证.

15. **证明** 记 $a_{1993}=a_1$,则

$$|a_i-a_{i+1}|=\begin{cases}a_i-a_{i+1} & a_i\geqslant a_{i+1},\\ a_{i+1}-a_i & a_i<a_{i+1}.\end{cases}$$

可见,不等式左端去掉绝对值符号后,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均出现两次,整个和式有一半数前面带有"+"号,另一半数前面带有"-"号,从而

$$\begin{aligned}\text{左端}&\leqslant 2[(1992+1991+\cdots+997)-(1+2+\cdots+996)]\\&=1984032.\end{aligned}$$

上式等号是可以取得的,如

$$\begin{aligned}&|1992-1|+|1-1991|+|1991-2|+|2-1990|+\cdots\\&+|997-996|+|996-1992|=1984032.\end{aligned}$$

练习六

1. **解** 依题设,有

$$\begin{cases} 20-5x^2>0, \\ a-x>0, \\ 20-5x^2>10(a-x). \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} -2<x<2, \\ x<a, \\ 1-\sqrt{5-2a}<x<1+\sqrt{5-2a}\left(a\leqslant\frac{5}{2}\right). \end{cases}$$

欲原不等式仅有惟一整数解 $x=1$,应有 $2\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$.因 a 为整数,故 $a=2$.

2. **解** 不等式可变为

$$4\leqslant-(2\cos x-1)^2+4+a^2\leqslant20,$$

即
$$a^2\geqslant(2\cos x-1)^2, \quad ①$$
$$a^2\leqslant16+(2\cos x-1)^2. \quad ②$$

注意到 $0\leqslant(2\cos x-1)^2\leqslant9$,依题设,应有 $a^2\geqslant9$ 且 $a^2\leqslant16$,所以 $a\in[-4,-3]\cup[3,4]$

3. **解** 依题设,有

$$k-\sin x\leqslant k^2-\sin^2 x\leqslant1$$

对一切实数 x 恒成立,即

$$\begin{cases} k-\sin x\leqslant k^2-\sin^2 x \\ k^2-\sin^2 x\leqslant1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} k^2-k\geqslant\sin^2 x-\sin x, & ① \\ k^2\leqslant1+\sin^2 x. & ② \end{cases}$$

由于 $x\in\mathbf{R}$ 时,

$$\sin^2 x-\sin x=\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

且 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$,故

$$-\frac{1}{4}\leqslant\sin^2 x-\sin x\leqslant2. \quad ③$$

由 ①,②,③ 得
$$\begin{cases} k^2-k\geqslant2, \\ k^2\leqslant1. \end{cases}$$

解得 $k=-1$,k 的集合为$\{-1\}$.

4. **解** 显见 $a\neq0$,原不等式可变为

$$2ax^2+2(2ay-y-1)x+(2a-1)y^2+1\geqslant 0. \qquad ①$$

①恒成立的充要条件是

$$\begin{cases} a>0, & ② \\ \Delta=4(2ay-y-1)^2-4\cdot 2a[(2a-1)y^2+1]\leqslant 0. & ③ \end{cases}$$

③可变为 $$(2a-1)(y+1)^2\geqslant 0. \qquad ④$$

由②,④知 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

5. **解** $1-mx\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$$\Leftrightarrow mx\geqslant\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}=\frac{x}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)} \qquad ①$$

①对 $x\in[0,1]$恒成立,故

$$m\geqslant\frac{1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x}}.$$

显然函数 $g(x)=\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x}}$, $x\in[0,1]$是减函数,故 $m\geqslant g(0)=\frac{1}{2}$.

6. **解** $$\sqrt{24+2x-x^2}>\sqrt{cx+d}$$

$$\Leftrightarrow 24+2x-x^2>cx+d\geqslant 0.$$

作函数 $y=24+2x-x^2$ 的图象,设抛物线上横坐标分别为 $-2,5$ 的两点 A,B,则 $A(-2,16)$,$B(5,9)$直线 AB 的方程:$y=-x+14$,此即为 $y=cx+d$ 的图象可得 $c=1,d=14$,于是 $c+d=13$.

7. **解** 令 $t_1=\log_{2000}\frac{x_0}{x_1}$, $t_2=\log_{2000}\frac{x_1}{x_2}$, $t_3=\log_{2000}\frac{x_2}{x_3}$,注意到 $x_0>x_1>x_2>x_3>0$,故 $t_1>0,t_2>0,t_3>0$,题设不等式变为

$$(t_1+t_2+t_3)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)\geqslant k.$$

因 $$(t_1+t_2+t_3)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)\geqslant 9,$$

当 $t_1=t_2=t_3$,即 x_0,x_1,x_2,x_3 成等比数列时取等号,故所求 k 最大值为 9.

8. **解** 依题设,对所有正整数 k,有

$$k^2+\frac{n}{k^2}\geqslant 1991,$$

即 $$k^4-1991k^2+n\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow(k^2-\frac{1991}{2})^2+n-\frac{1991^2}{4}\geqslant 0.$$

当 $k=32$ 时，$k^2-\frac{1991}{2}=\frac{57}{2}$，$(k^2-\frac{1991}{2})^2$ 达到最小值$\frac{57^2}{4}$，从而有 $n\geqslant\frac{1}{4}(1991^2-57^2)=1024\times 967$. 另一方面，$k^2+[\frac{n}{k^2}]$的最小值为 1991，可见有正整数 k，使得

$$k^2+\frac{n}{k^2}<1992,$$

即
$$(k^2-996)^2+n-996^2<0.$$

当 $k=32$ 时，$(k^2-996)^2$ 达到最小值，有 $n<996^2-28^2=1024\times 968$.

综上所述，所求正整数 n 为 $1024\times 967+i(i=0,1,\cdots,1023)$.

9. **解**　问题等价于求函数.

$$f(a,b,c)=\frac{(a+b)^2+4(a+b+8c)^2}{abc}(2a+2b+c)(a,b,c\in\mathbf{R}^+)$$

的最小值，记 $d=\frac{1}{2}(a+b)$，则

$$f(a,b,c)\geqslant\frac{4d^2+16(d+4c)^2}{d^2c}(4d+c).$$

$$\geqslant 4\cdot\frac{d^2+64cd}{d^2c}(4d+c)$$

$$=4(\frac{1}{c}+\frac{64}{d})(4d+c)$$

$$=4(4\cdot\frac{d}{c}+64\cdot\frac{c}{d}+257)$$

$$\geqslant 4(2\times 16+257)=1156.$$

当且仅当 $a=b=4c$ 时等号成立，故 $k_{max}=1156$.

10. **解**　两题设不等式依次记作①，②. 由②知 $m<(x-m)^2+(y-1)^2$，再取 $x=m,y=1$，即知 $m<0$.

将 $m<0$ 代入①，有

$$2\cos 2(x-y)+8m\cos(x-y)+8m(m+1)+5>0,$$

即
$$4\cos^2(x-y)+8m\cos(x-y)+8m^2+8m+3>0. \quad ④$$

记 $t=\cos(x-y)$，④式左端可表示为

$$f(t)=4t^2+8mt+8m^2+8m+3,t\in[-1,1]$$

注意到 $m<0$，欲使④恒成立，须且只须 m 满足

$$\Delta = 8m^2 - 16(8m^2 + 8m + 3) < 0, \qquad ⑤$$

或不等式组

$$\begin{cases} f(1) = 4 + 8m + 8m^2 + 8m + 3 > 0, \\ -\dfrac{8m}{2 \times 4} > 1, \\ (8m)^2 - 16(8m^2 + 8m + 3) \geqslant 0. \end{cases} \qquad ⑥$$

由⑤解得 $m < -\dfrac{3}{2}$ 或 $m > -\dfrac{1}{2}$，由不等式组⑥解得 $-\dfrac{3}{2} \leqslant m < -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

综上所述，取值范围为 $(-\infty, -1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}) \cup (-\dfrac{1}{2}, 0)$.

11. **解** 将所给不等式改写为

$$A(x-y)^2 - (B-A-C)(x-y)(y-z) + C(y-z)^2 \geqslant 0,$$

令 $t = \dfrac{x-y}{y-z}(y \neq z)$；上式又可写为

$$At^2 - (B-A-C)t + C \geqslant 0. \qquad ①$$

①对任意实数 t 成立的充要条件是

$$\begin{cases} A > 0, \\ (B-A-C)^2 - 4AC \leqslant 0; \end{cases} \qquad 或 \begin{cases} A = B-A-C = 0, \\ C \geqslant 0. \end{cases}$$

即 $A \geqslant 0, B \geqslant 0, C \geqslant 0, A^2 + B^2 + C^2 \leqslant 2(AB + BC + CA)$

12. **解** 不等式对一切实数 x, y, z 恒成立，等价于

$$x^2 - 2(y\cos\alpha + z\cos\gamma)x + y^2 + z^2 - 2yz\cos\beta \geqslant 0$$

对一切实数 x, y, z 成立，也就等价于

$$\frac{1}{4}\Delta_x = (y\cos\alpha + z\cos\beta)^2 - (y^2 + z^2 - 2yz\cos\beta)$$

$$= -y^2\sin^2\alpha + 2yz(\cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta) - z^2\sin^2\gamma \leqslant 0$$

对一切实数 y, z 恒成立，也就等价于

$$\frac{1}{4}\Delta_y = z^2(\cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta)^2 - z^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma$$

$$= 4z^2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} \leqslant 0$$

或 $\sin\alpha = \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta = 0$ 对一切正实数 z^2 恒成立.

综上所述 $\cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cos\dfrac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} \leqslant 0$ 为所求

充要条件.

13. **解** 当 $2\leqslant a_2$ 时,

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2+2x_1x_2+2x_2x_3+\cdots+2x_{n-1}x_n$$
$$\geqslant x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+\cdots+2x_n^2+2x_1x_2+\cdots+2x_{n-1}x_n$$
$$\geqslant (x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2\geqslant 0.$$

因 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零,故上式不能取等号,否则 $x_1+x_2=x_2+x_3=\cdots=x_{n+1}+x_n=x_n=0$,即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$,导致矛盾.

以上说明 $a_2\geqslant 2$ 是题设不等式成立的充分条件

当 $a_1=a_2=1$ 时,取 $x_3=x_4=\cdots=x_n=0$,于是,

$$\begin{aligned}&a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n{}^2\\&\quad+2x_1x_2+\cdots+2x_{n-1}x_n\\&=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2,\\&=(x_1+x_2)^2.\end{aligned}$$

再取 $x_1=1,x_2=-1$,上式等于 0,可见 $a_2\geqslant 2$,是题设不等式对一切不会为零实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 成立的必要条件.

综上所述,$a_2\geqslant 2$ 为所求的充要条件.

练习七

1. **解** 不难看出 $(x,y)=(2,-1)$ 是方程 $3x+5y=1$ 的一组解.从而有 $(x,y)=(2\times 101,-101)$ 是方程 $3x+5y=101$ 的一组解,于是它们的全部解为 $\begin{cases}x=202+5t\\y=-101-3t\end{cases}(t\in\mathbf{Z})$.由 $\begin{cases}202+5t\geqslant 0,\\-101-3t\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-40\leqslant t\leqslant -34$,故 t 可取 -40,$-39,\cdots,-34$,原方程全部非负整数解为(32,1),(27,4),(22,7),(17,10),(12,13),(7,16),(2,19)共七组.

2. **解** 不妨设 $x\leqslant y$,依题设,有

$$3x^2\leqslant x^2+xy+y^2=49,$$

故 $x\leqslant\frac{\sqrt{40}}{3}$,于是 x 仅可取 1,2,3,4.代入原方程可得解 $\begin{cases}x=3,\\y=5,\end{cases}$ 根据对称性,还有解 $\begin{cases}x=5,\\y=3.\end{cases}$

3. **证明** 假设方程有解,显然 $0<x<y$. 于是

$$(y-x)(y^2+xy+x^2)=11^3,$$

注意到 $y>11$,故 $y^2+xy+x^2>11^2$,有 $y-x=1$,$y^2+xy+x^2=11^3$,进而有 $(x+1)^2+x(x+1)+x^2=11^3$,即 $3(x^2+x)=1330$,但 $3\nmid 1330$ 矛盾. 命题获证.

4. **解** 原方程可变为 $y^3=(z^2-x)(z^2+x)$. 若原方程有素数解,则 y 是素数,所以有

$$\begin{cases} z^2-x=1 \\ z^2+x=y^3 \end{cases} \text{(I)或} \begin{cases} z^2-x=y \\ z^2+x=y^2 \end{cases} \text{(II)}$$

由①得 $2x=y^3-1=(y-1)(y^2+y+1)$. 因此有 $y-1=2$,即 $y=3$,此时 $x=13$,$z=\sqrt{14}$,故①无素数解.

由②得 $2x=y^2-y=y(y-1)$,因 x,y 为素数,因此有 $y-1=2$,$x=y=3$,此时 $z=\sqrt{6}$. ②也无素数解.

故原方程无素数解.

5. **解** 显然 x^y 是奇数,从而 x 也是奇数,方程可写为

$$x^y+1=2^z. \qquad ①$$

(i) 当 y 为奇数时,①可变为

$$(x+1)(x^{y-1}-x^{y-2}+\cdots-x+1)=2^z. \qquad ②$$

②式左边第二个因式是奇数,只能是 1,于是②变为 $x+1=2^z$,且 $y=1$ 与题设矛盾.

(ii) 当 y 为偶数时,设 $y=2k$,$k\geqslant 1$,$x^k=2l+1$,于是

$$x^y+1=(x^k)^2+1=(2l+1)^2+1=4l(l+1)+2. \qquad ③$$

由①,③知,$z=1$,进而 $x=1$,矛盾.

综上所述,方程无正整数解.

6. **解** 原方程可变为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$. 不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$,则 $\frac{1}{x}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{3}{x}$,即 $\frac{1}{x}<\frac{4}{5}\leqslant\frac{3}{x}$,因此 $1<x<4$,故 $x=2,3$. 当 $x=2$ 时,有

$$\frac{2}{y}\geqslant\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}-\frac{1}{x}=\frac{3}{10},\ \frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10},$$

由此得 $3<y<7$.

若 $y=4$,则 $z=20$;若 $y=5$,则 $z=10$;若 $y=6$,则 z 不是整数.

当 $x=3$ 时,有

$$\frac{2}{y}\geqslant\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}-\frac{1}{x}=\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{7}{15},$$

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{15}.$$

由此得知 $2 < y < 5$. 但 $y = 3$ 或 $y = 4$ 时，z 都没有整数解，因此原方程共有 12 组正整数解：

(2,4,20),(2,20,4),(4,2,20),(20,2,4),(4,20,2),(20,4,2),(2,5,10),(2,10,5),(5,2,10),(10,2,5),(5,10,2),(10,5,2).

7. **证明** 设有正整数 x, y 满足①式，由于正整数 $x, x+1$ 是互素的，而它们的积是完全平方. 因此它们都是完全平方数，设 $x = u^2, x+1 = v^2, 0 < u < v$，则

$$v^2 - u^2 = (v-u)(v+u) = 1.$$

所以 $v - u = 1, v + u = 1$，因此 $u = 0, u = 1$，从而 $x = 0$，矛盾.

8. **解** 设 $x, y \in \mathrm{Z}$ 满足方程. 当 $x > 0$ 时，

$$(x^2+1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1 < y^4 < (x^3+2)^2.$$

由此得到 $x^3 + 1 < y^2 < x^3 + 2$，不可能. 当 $x \leqslant -2$ 时，$x^3 + 3 < 0$，从而

$$(x^3+2)^2 < y^4 < (x^3+1)^2.$$

由此得
$$-(x^3+2) < y^2 < -(x^3+1)$$
不可能；当 $x = -1$ 时，$y^4 = -1$，不可能，$x = 0$ 时，$y^4 = 1$. 求此得到方程的解为 $x = 0, y = \pm 1$.

9. **证明** 取 $x = 2^{15k+10}, y = 2^{6k+4}, z = 2^{10k+7} (k \in \mathrm{N})$，则这样的 x, y, z 满足 $x^2 + y^5 = z^3$，所以方程有无穷多组满足 $xyz \neq 0$ 的整数解.

另证 先求方程的一组特解，易知 $x = 10, y = 3, z = 7$ 是方程 $x^2 + y^5 = z^3$ 的一组解，因而 $x = 10a^{15k}, y = 3 \cdot a^{6k}, z = 7 \cdot a^{10k} (a, k \in \mathrm{N})$ 是方程的解.

10. **解** 不妨设 $p > q$. 于是仅有一组解 $(p, q, r) = (2, 3, 17)$. 事实上，欲使 r 为素数，p 与 q 不解全为奇数，因此 $p = 2$. 又 $q \geqslant 5$ 时，有

$$\begin{aligned} 2^p + q^2 &= (2^q + 1) + (q^2 - 1) \\ &= 3(2^{q-1} - 2^{q-2} + \cdots + 1) + (q-1)(q+1) \end{aligned}$$

为 3 的倍数，不可能为素数，故 $(p, q, r) = (2, 3, 17), (3, 2, 17)$.

11. **证明** 由恒等式 $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ 可知，任意奇数均可表示为两个连续整数的平方差，特别地，任意一个不等于 ± 1 的奇数均可表示为两个连续正整数的平方差.

对任意 $n \in \mathrm{Z}$，取 $x \in \mathrm{N}$，使得 $n - x^2$ 是不等于 ± 1 的奇数（仅需取 x，使 n 与 x 的奇偶性不同），这样的 x 有无穷多个，对奇数 $n - x^2$ 而言，必存在正整数 y, z 使得 $y^2 - z^2 = n - x^2$，从而 $x^2 + y^2 - z^2 = n$. 这说明原方程有无穷多组正整数解.

12. **解** 依题设，有

$$(n^2-mn-m^2)^2=1, \quad ①$$

故

$$n^2=m^2+mn\pm1\geqslant m^2,$$

有 $n\geqslant m$. 当且仅当 $m=n=1$ 时等号成立.

显然 $m=1,n=1$ 是①的一组解，当 $m\neq1,n\neq1$ 时，$n-m>0$，且有

$$(n^2-mn-m^2)^2=[(n-m)^2+m(n-m)-m^2]^2$$
$$=[m^2-m(n-m)-(n-m)^2]^2.$$

于是，若 (m,n) 是①的一组解，那么 $(n-m,m)$ 也是①的一组解，由于 $n>m$，则可以 (n,m) 出发，递降得到 $(1,1)$. 反之，亦成立.

即由解 $(1,1)$ 出发，利用从 $(n-m,m)\to(m,n)$ 可得到满足 $m,n\in\{1,2,\cdots,1981\}$ 的全部解，即

$$(1,1)\to(1,2)\to(2,3)\to(3,5)\to(5,8)$$
$$\to(8,13)\to(13,21)\to(21,34)\to(34,55)$$
$$\to(55,89)\to(89,144)\to(144,233)\to(233,377)$$
$$\to(377,610)\to(610,987)\to(987,1597).$$

因此，所求的 m^2+n^2 的最大值为 $987^2+1597^2=3524578$.

13. **证明** 设 $W=a+bi(a,b\in\mathrm{N})$. $W^n=x_1+y_1i$，x_1,y_1 是非零整数，构造恒等式 $(|W^2|)^n=|W^{2n}|=|W^n|^2$，有 $(a^2+b^2)^n=x_1^2+y_1^2$，取 $z=a^2+b^2$，$x=|x_1|$，$y=|y_1|$，则得 $x^2+y^2=z^n$ 的一组正整数解.

练习八

1. **解** $t=0$ 时，$x=2,y=-1$，即点 $(2,-1)$ 在直线上，斜率为 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，$\alpha\in[0,\pi]$，因 $\frac{b}{a}<0$. $\mathrm{arctg}\frac{b}{a}\in(-\frac{\pi}{2},0)$，故选(D).

2. **解** $6xy+4x-9y-6=0\Leftrightarrow(2x-3)(3y+2)=0$，即二直线为 $2x-3=0$，$3y+2=0$. 显然二直线互相垂直. 选(A).

3. **解** 设 $l_1:4x+y=4$，$l_2:mx+y=0$，$l_3:2x-3my=4$，则 $l_1/\!/l_2\Leftrightarrow m=4$；$l_1/\!/l_3\Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$；$l_2/\!/l_3\Leftrightarrow m^2=-\frac{2}{3}$，此时 m 不存在；l_1,l_2,l_3 三线共点 $\Leftrightarrow m=-1$ 或 $m=\frac{2}{3}$. 故 l_1,l_2,l_3 不能围成三角形的 m 值最多是 4 个，选(D).

4. **解** 设 M 到 y 轴距为 d，依题设则有 $|MA|=|MB|=d$，于是可得方程组

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=x^2,\\(x-a)^2+(y-2)^2=x^2,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}1-2x+y^2=0,\\a^2-2ax+(y-2)^2=0.\end{cases}$$

消去 x 后，整理得

$$(1-a)y^2-4y+a^2-a+4=0. \qquad ①$$

（ⅰ）当 $a=1$ 时，方程①有惟一解 $y=1$，这时点 M 是 $(1,1)$.

（ⅱ）当 $a\neq1$ 时，欲使方程①有惟一解，则须判别式 $\Delta=0$，即

$$\Delta=16-4(1-a)(a^2-a+4)=0.$$

化简得 $a(a^2-2a+5)=0$. 由于 $a^2-2a+5>0$，故 $a=0$. 此时点 M 是 $(\frac{5}{2},2)$.

综上所述，当 $a=1$ 或 $a=0$ 时，适合条件的点 M 恰有一个，选(B).

5. **解** A、B 在直线 l 的两侧，则线段 AB 与 l 的交点 P 一定是 $\overline{AB}$ 的内分点.
设此分比是 λ，则 $\lambda>0$，于是，$x_p=\dfrac{2+2\lambda}{1+\lambda}$，$y_p=\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}$. 由于 p 在直线 $l:2x-3y+C=0$ 上，所以

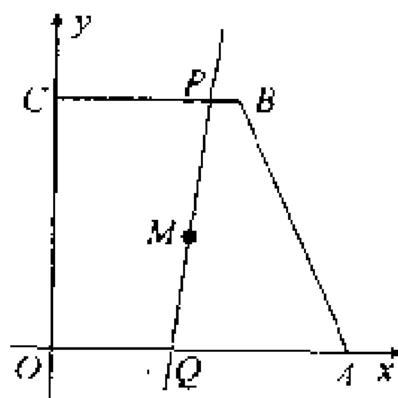
$$\frac{4-4\lambda}{1+\lambda}-\frac{3+6\lambda}{1+\lambda}+c=0$$

可得 $\lambda=\dfrac{1+c}{10-c}>0$，解得 $-1<c<10$.

6. **解** 设顶点 B 的坐标是 (x,y)，由 $A(3,4)$ 及重心 $G(1,1)$，可得 $C(-x,-y-1)$. 因原点 O 是重心，故 $AO\perp BC$，$BO\perp AC$，可得

$$\begin{cases}3x+4y+2=0,\\x^2+y^2+3x+5y=0,\end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{6}{5}$，$y=-\dfrac{7}{5}$ 或 $x=-\dfrac{6}{5}$，$y=\dfrac{2}{5}$. 由于 B 点在第二象限，所以 B 点坐标是 $(-\dfrac{6}{5},\dfrac{2}{5})$.



（第 7 题）

7. **解** 如图，设点 P 的坐标是 $(a,5)$，$0<a<4$，

$$k_{PQ}=\frac{5-\frac{5}{2}}{a-\frac{10}{3}}=\frac{\frac{5}{2}}{a-\frac{10}{3}},$$

进而有直线

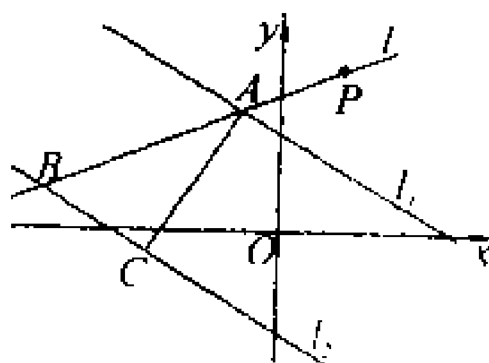
$$PQ: y-\frac{5}{2}=\frac{\frac{5}{2}}{a-\frac{10}{3}}\left(x-\frac{10}{3}\right). \quad ①$$

在①中，令 $y=0$，得 $x=\frac{20}{3}-a$，即 $|OQ|=\frac{20}{3}-a$，所以

$$S_{OQPC}:S_{OABC}=\frac{|CP|+|OQ|}{|CB|+|OA|}=\frac{a+\frac{20}{3}-a}{10}=\frac{2}{3}.$$

即得 $S_{OQPC}:S_{QABP}=2:1$.

8. **解** 注意到两平行直线 l_1、l_2 间的距离 $|AC|=\frac{|-7-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$. 又因 $|AB|=\frac{3}{2}$，则 $\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，于是 l 和 l_2 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，由夹角公式，得



（第8题）

$$\tan\frac{\pi}{4}=\left|\frac{k+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}k}\right|$$

解得 $k=-7$ 或 $\frac{1}{7}$. 故所求直线方程为 $7x+y-17=0$ 或 $x-7y+19=0$.

9. **解** 令原二次方程可表示为

$$(x+3y+l)(x-2y+m)$$
$$=x^2+xy-6y^2+(l+m)x+(3m-2l)y+lm.$$

比较各项对应系数，得 $l+m=-20, 3m-2l=-20, lm=k$，解得 $l=-8, m=-12, k=96$. 所求两直线方程为 $x+3y-8=0$，与 $x-2y-12=0$，夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

10. **解** 设点 B 关于 l 的对称点 C，对于 l 上点 N，有 $|NA|-|NB|=|NA|-|NC|$. 现只须在 l 上找一点 M，使 $|MA|-|MC|$ 有最大值.

设 C 点坐标为 (x_0, y_0)，因 B、C 关于 l 对称，故有

$$\frac{3x_0}{2}-\frac{y_0+4}{2}-1=0, \quad ①$$

且

$$\frac{y_0-4}{x_0}=-\frac{1}{3}, \quad ②$$

成立. 解①，②得 $\begin{cases} x_0=3, \\ y_0=3 \end{cases}$，所以点 C 的坐标为 $(3,3)$，射线 AC 的方程为

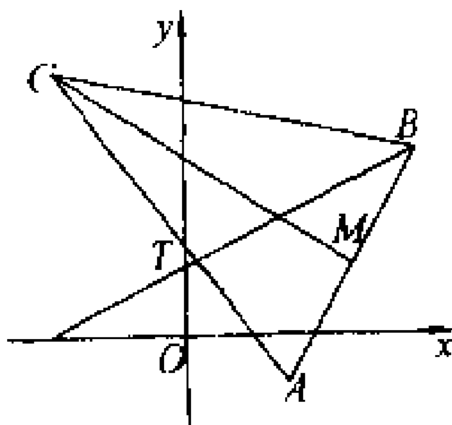
$$2x+y-9=0 (x\leqslant 4). \quad ③$$

又直线 l 的方程为

$$3x-y-1=0. \qquad ④$$

将③,④联立,解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=5, \end{cases}$ 即得 $M(2,5)$.

11. **解** 如图,设 AB 边中点 M,因 $\angle B$ 的平分线所在直线方程是 $x-4y+10=0$,可设 $B(4t-10,t)$,则 $M(\frac{4t-7}{2},\frac{t-1}{2})$,且 M 在 AB 的中线上,所以 $6\cdot\frac{4t-7}{2}+10\cdot\frac{t-1}{2}-59=0$,解得 $t=5$,故 $B(10,5)$.



(第 11 题)

设 $\angle B$ 的平分线是 BT,则 $k_{BT}=\frac{1}{4}$,$k_{AB}=\frac{6}{7}$ 及 $\angle ABT=\angle CBT$,有

$$\frac{k_{BT}-k_{BC}}{1+k_{BT}k_{BC}}=\frac{k_{AB}-k_{BT}}{1+k_{AB}\cdot k_{BT}},$$

解得 $k_{BC}=-\frac{2}{9}$.故 BC 的在直线方程是 $2x+9y-65=0$.

也可利用轴对称,求出直线 AB 关于直线 BT 对称的直线方程,为此求出 A 点关于直线 BT:$x-4y-10=0$ 对称点 A' 的坐标.设 $A'(x_0,y_0)$,于是

$$\begin{cases} x_0-4y_0+27=0, \\ 4x_0+y_0-11=0, \end{cases}$$

解得 $A'(1,7)$,则 BC 所在直线方程是

$$2x+9y-65=0.$$

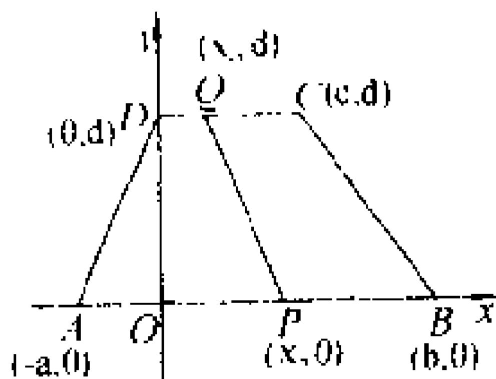
12. **证明** 建立直角坐标系,各点坐标如图所示,因 $S_{APQD}=S_{PBCQ}$,故

$|AP|+|QD|=|PB|+|CQ|$.

即 $\quad (x_p+a)+x_Q=(b-x_p)+(c-x_Q)$.

因此,有

$$x_p+x_Q=\frac{1}{2}(b+c-a).$$

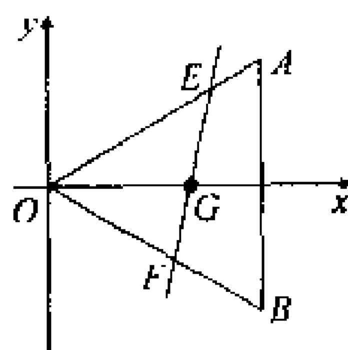


(第 12 题)

直线 PQ 的方程为 $(x_Q-x_p)y-d(x-x_p)=0$,即 $dx-(x_p+x_Q)y-x_p(d-2y)=0$.由 $\begin{cases} dx-(x_p+x_Q)y=0, \\ d-2y=0 \end{cases}$ 得 PQ 过定点 $(\frac{x_p+x_Q}{2},\frac{d}{2})$.即 $(\frac{b+c-a}{4},\frac{d}{2})$.

13. **解** 如图,建立直角坐标系,$\triangle OAB$ 的两边 OA、OB 所在直线方程即可合并为

$$x^2-3y^2=0. \quad ①$$



(第 13 题)

又设△OAB重心为G,它的坐标是$(\frac{\sqrt{3}}{3}a,0)$.过G的任意直线EF的方程是

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}a+t\cos\alpha, & ② \\ y=t\sin\alpha, & ③ \end{cases}$$

其中t为参数,α为倾斜角.把②,③代入①,整理得

$$(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha)t^2+(\frac{2\sqrt{3}a}{3}\cos\alpha)t+\frac{1}{3}a^2=0. \quad ④$$

根据t的几何意义,知方程④的两根为$p,-q$,进而不难知道以$\frac{1}{p},-\frac{1}{q}$为根的方程为

$$\frac{1}{3}a^2t^2+(\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot a\cos\alpha)t+(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha)=0. \quad ⑤$$

根据韦达定理,由⑤得

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=-\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}a\cos\alpha}{\frac{1}{3}a^2}=-\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{a},$$

$$-\frac{1}{pq}=\frac{3(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha)}{a^2},$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p^2}-\frac{1}{pq}+\frac{1}{q^2}\\ &=(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})^2+\frac{1}{pq}\\ &=\frac{12\cos^2\alpha-3(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha)}{a^2}\\ &=\frac{9}{a^2}.\end{aligned}$$

14. **证明** 在△ABC内部取AL、BM、CN的交点为原点,建立直线坐标系,设直线BC、CA、AB的方程为

$$a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2,3),$$

并且点P到BC、CA、AB的距离为d_i,则

$$d_i=\frac{a_ix+b_iy+c_i}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}(i=1,2,3).$$

过点 A 的直线束为

$$\lambda d_2+\mu d_3=0, \qquad ①$$

设 $\alpha=\angle PAC$、$\beta=\angle BAP$，$\delta=\angle CBP$，$\gamma=\angle PBA$，$\theta=\angle PCB$，$\tau=\angle ACP$，则点 P 到 CA、AB 的距离之比为 $\sin\alpha:\sin\beta$，因此取 $\lambda=\sin\beta$，$\mu=-\sin\alpha$，由①得

$$d_2\sin\beta-d_3\sin\alpha=0. \qquad ②$$

显然点 P 的坐标满足②，从而直线 AL 的方程即为②.

同样，BM、CN 的方程为

$$d_3\sin\delta-d_1\sin\gamma=0,$$

与

$$d_1\sin\tau-d_2\sin\theta=0.$$

依题设，AL'、BM'、CN' 的方程为

$$d_2\sin\alpha-d_3\sin\beta=0,$$

$$d_3\sin\gamma-d_1\sin\delta=0,$$

$$d_1\sin\theta-d_2\sin\tau=0, \qquad ③$$

这样一来，可得到过 AL'、BM' 的直线束

$$\lambda(d_2\sin\alpha-d_3\sin\beta)+\mu(d_3\sin\gamma-d_1\sin\delta)=0. \qquad ④$$

因

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\tau}=\frac{d_2}{d_3}\cdot\frac{d_3}{d_1}\cdot\frac{d_1}{d_2}=1,$$

从而

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta\sin\delta}=\frac{\sin\tau}{\sin\theta}. \qquad ⑤$$

取 $\lambda=\sin\gamma$，$\mu=\sin\beta$，由①得

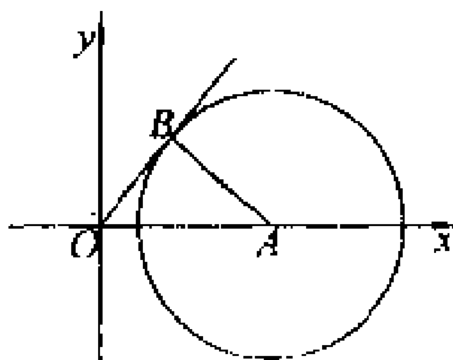
$$d_2\sin\alpha\cdot\sin\gamma-d_1\sin\beta\sin\delta=0, \qquad ⑥$$

由⑤即知⑥与③相同，说明直线 CN' 过 AL'，BM' 的交点，命题可获证.

练习九

1. **解** 设 $\frac{y}{x}=k$，则 $y=kx$，k 可视为过原点的直线的斜率，如图，$|OA|=$

$2,|AB|=\sqrt{3},\cos\angle BAO=\frac{\sqrt{3}}{2},\angle BAO=\frac{\pi}{6},\angle AOB$ $=\frac{\pi}{3},k=\sqrt{3}$,选(B).



(第1题)

2. **解** 圆的方程可写为

$$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

若 $D^2=4F$ 且 $E\neq 0$,则圆心在$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$处,半径为$\frac{|E|}{2}$,故圆与 x 轴相切.反之,若圆与 x 轴相切,则$\frac{|E|}{2}=\sqrt{\frac{D^2+E^2-4F}{4}}$,即 $D^2=4F$,且 $E\neq 0$,选(C).

3. **解** 当 $x\geqslant 1$ 时,曲线方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=1(x\geqslant 1)$,表示位于右半平面的半圆;当 $x\in(-1,1)$时,$|x|<1$,$|x|-1$ 为负数,矛盾,故此时曲线不存在;当 $x\leqslant -1$ 时,曲线方程为$(x+1)^2+(y-1)^2=1$,$(x\leqslant -1)$,表示位于左半平面的一个半圆,选(C).

4. **解** 曲线 $x^2+y^2-y=0$,即圆 $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$,其圆心为$(0,\frac{1}{2})$,半径为$\frac{1}{2}$.另一曲线方程为 $ax^2+bxy+x=x(ax+by+1)=0$,为两直线 $x=0$ 与 $ax+by+1=0$.直线 $x=0$ 与圆有两交点 $O(0,0)$、$A(0,1)$,依题意,分两种情况.

(ⅰ) $ax+by+1=0$ 与圆相切且切点异于 O、A,此时 $a\neq 0$,否则切点将为 A、O,于是

$$\frac{|a\cdot 0+b\cdot\frac{1}{2}+1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1,$$

即得 $a^2=4b+4$.

(ⅱ) 直线 $ax+by+1=0$ 过 A 但非 y 轴,此时 $b=-1$,注意到原点$(0,0)$不在上述直线上.

综上所述,选(D).

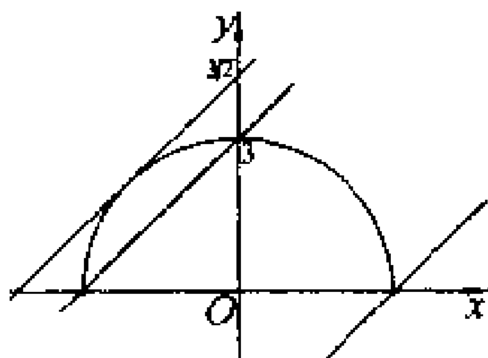
5. **解** A、B 关于两圆连心线,即直线 $3x-2y+5=0$ 对称.设 B 点坐标为(x,y),则

$$\begin{cases}\frac{y-5}{x+4}=-\frac{2}{3},\\ 3\cdot\frac{x-4}{2}-2\cdot\frac{y+5}{2}+5=0.\end{cases}$$

解得$(x,y)=\left(\frac{50}{13},-\frac{3}{13}\right)$.

6. **解** M、N分别表示以$O(0,0)$、$O'(1,\sqrt{3})$为圆心，半径为$\sqrt{2}a$、a的半圆和圆，当半圆O与圆O'外切时，$a_{min}=2\sqrt{2}-2$. 当半圆O与圆O'内切时，$a_{max}=2\sqrt{2}+2$，所求和为$4\sqrt{2}$.

7. **解** 如图，M为以半圆$x^2+y^2=9(y>0)$去掉两端点剩下图形. b为直线$y=x+b$的截距，依题意，$-3<b\leqslant 3$或$b=3\sqrt{2}$.



（第7题）

8. **解** 由$OP\perp OQ$知$x_1x_2+y_1y_2=0$，又由

$$\begin{cases}x^2+y^2+x-6y+m=0,\\x+2y-3=0,\end{cases}$$

可得 $$5y^2-20y+m+12=0.$$

根据韦达定理，有$y_1y_2=\frac{m+12}{5}$，$y_1+y_2=4$，于是

$$\begin{aligned}x_1\cdot x_2&=(3-2y_1)(3-2y_2)\\&=9-6(y_1+y_2)+4y_1y_2\\&=\frac{4(m+12)}{5}-15,\end{aligned}$$

所以 $$\frac{m+12}{5}+\frac{4(m+12)}{5}-15=0.$$

解得$m=3$.

9. **解** 由$\begin{cases}y=mx,\\x^2+y^2-6x-4y+10=0\end{cases}$得

$$(1+m^2)x^2-(6+4m)x+10=0.$$

根据韦达定理有 $$x_p=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+2m}{1+m^2},$$

$$y_p=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{m(3+2m)}{1+m^2}.$$

再由$\begin{cases}y=mx,\\3x+2y+10=0\end{cases}$解得$x_Q=\frac{-10}{3+2m}$，$y_Q=\frac{-10m}{3+2m}$，因

$$|OP|^2=\sqrt{\left(\frac{3+2m}{1+m^2}\right)^2+\left(\frac{m(3+2m)}{1+m^2}\right)^2}=\frac{|3+2m|}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$|OQ|^2=\sqrt{\left(\frac{-10}{3+2m}\right)^2+\left(\frac{10m}{3+2m}\right)^2}=\frac{10\sqrt{1+m^2}}{|3+2m|},$$

所以$|OP|\cdot|OQ|=10$.

也可设 l_1 的参数方程$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$,($t$ 是参数),
代入圆 C 方程得

$$t^2-(6\cos\alpha+4\sin\alpha)t+10=0.$$

有 $OP=\frac{1}{2}(t_1+t_2)=3\cos\alpha+2\sin\alpha$. 再将 l_1 的参数方程代入 l_2 的方程,得 $(3\cos\alpha+2\sin\alpha)t+10=0$,则 $OQ=\frac{-10}{3\cos\alpha+2\sin\alpha}$.于是,$|OP|\cdot|OQ|=10$.

10. **解** 对于圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点 $P(x,y)$,欲使不等式 $x+y+m\geqslant0$ 即 $x+y\geqslant-m$ 恒成立,只须令 $\mu=x+y$,使 $\mu_{\min}\geqslant-m$,则 m 的取值范围便可求得.

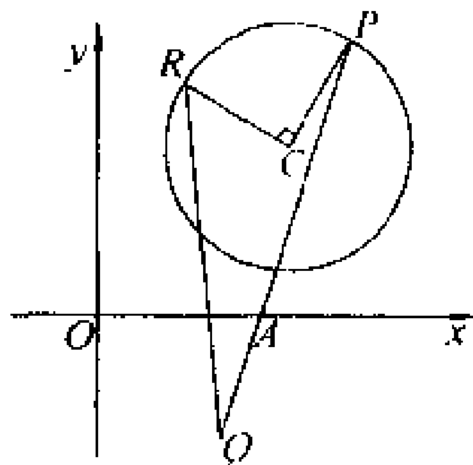
由 $\mu=x+y$ 得 $x=\mu-y$,代入圆的方程 $x^2+(y-1)^2=1$,并化简整理得 $2y^2-2(\mu+1)y+\mu^2=0$. 由 $\Delta\geqslant0$ 得 $1-\sqrt{2}\leqslant\mu\leqslant1+\sqrt{2}$,所以 $\mu_{\min}=1-\sqrt{2}$. 于是 $1-\sqrt{2}\geqslant-m$,解得 $m\geqslant\sqrt{2}-1$.

另解,设已知圆上任一点$(\cos\theta,1+\sin\theta)$,故 $\mu=x+y=\cos\theta+\sin\theta+1=\sqrt{2}\cdot\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+1$,于是 $\mu_{\min}=1-\sqrt{2}$. 同理,由 $1-\sqrt{2}\geqslant-m$,解得 $m\geqslant\sqrt{2}-1$. 故 m 的取值范围是$[\sqrt{2}-1,+\infty)$.

11. **解** 圆的方程可变为 $x^2+y^2-4y+2-2a(x-y)=0$. 该式对任意不等于 1 的实数 a 成立,故

$$\begin{cases}x^2+y^2-4y+2=0,\\x-y=0.\end{cases}$$

解得$(x,y)=(1,1)$. 注意到圆心$(a,2-a)$与点(1,1)均在直线 $x+y=2$ 上,所以 l 是过(1,1)且垂直于直线 $x+y=2$ 的直线 $y=x$.



(第 12 题)

12. **解** 设 $P(5+4\cos\theta,5+4\sin\theta)$,则 $R(5+4\cos(\theta+\frac{\pi}{2}),5+4\sin(\theta+\frac{\pi}{2}))$,即$(5-4\sin\theta,5+4\cos\theta)$. 又 $Q(5-4\cos\theta,-5-4\sin\theta)$. 于是

$$|RQ|^2=(4\cos\theta-4\sin\theta)^2+(10+4\cos\theta+4\sin\theta)^2=132+80\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\theta+\frac{\pi}{4}).$$

故$|RQ|^2_{max}=132+80\sqrt{2}$，$|RQ|^2_{min}=132-80\sqrt{2}$，即$|RQ|_{max}=10+4\sqrt{2}$，$|RQ|_{min}=10-4\sqrt{2}$.

13. **解** 设ΔABC内切圆方程为$x^2+y^2=1$，AC、AB、BC方程为$x\cos\frac{\pi}{6}+y\sin\frac{\pi}{6}=1$，$x\cos\frac{5\pi}{6}+y\sin\frac{5\pi}{6}=1$，$x\cos\frac{3\pi}{2}+y\sin\frac{3\pi}{2}=1$，设$P(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，可得$r^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{12})$，$p^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\sin(\frac{5\pi}{12}-\frac{\theta}{2})$，$q^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$.进一步即可推得$p^{\frac{1}{2}}+r^{\frac{1}{2}}=q^{\frac{1}{2}}$.

14. **解** (1) 显然①为过两定点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)的圆方程.设C为过两点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)的一个圆，在圆C上另取一异于这两点的点(x_3,y_3)，则(x_3,y_3)与(x_1,y_1)，(x_2,y_2)不共线，将(x_3,y_3)代入①，得

$(x_3-x_1)(x_3-x_2)+(y_3-y_1)(y_3-y_2)+k[(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)]=0$，

且有$(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)\neq 0$，

取$k=-\frac{(x_3-x_1)}{(x_3-x_1)}\frac{(x_3-x_2)+(y_3-y_1)\cdot(y_3-y_2)}{(y_2-y_1)-(y_3-y_1)\cdot(x_2-x_1)}$，则①可变为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)-[(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)]\cdot\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)+(y_3-y_1)(y_3-y_2)}{(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)}=0.$$

显然，这是过三点$(x_i,y_i)(i=1,2,3)$的惟一的圆的方程，即圆C的方程.

(2)因为所求的圆过点$(-2,3)$，$(1,4)$，由(1)知，可设其方程为

$$(x+2)(x-1)+(y-3)(y-4)+k[(x+2)-(y-3)\cdot 3]=0,$$

即
$$x^2+y^2+(k+1)x-(3k+7)y+11k+10=0, \quad ①$$

它与圆$x^2+y^2-7y+10=0$的公共弦所在直线方程为

$$(k+1)x-3ky+11k=0. \quad ②$$

直线②与直线$2x-3y-1=0$平行，从而有$(k+1):2=(-3k):(-3)$，解得$k=1$.代入①得$x^2+y^2+2x-10y+21=0$.此即为所求圆方程.

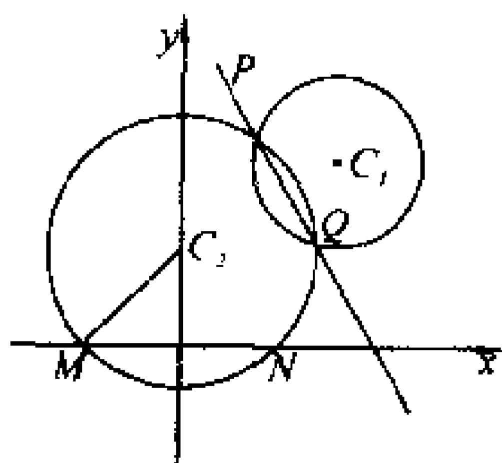
15. **解** 以MN所在直线为x轴，MN的中垂线为y轴建立坐标系如图所示.设$M(-a,0)$，$N(a,0)$ $(a>0)$.由于C_1是定圆，可设为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \quad ①$$

圆C_2是过M、N的动圆，圆心C_2在y轴上移动，设$C_2(0,t)$(t是参数)，则圆C_2方程为$x^2+(y-t)^2=t^2+a^2$，即

$$x^2+y^2-2ty-a^2=0.\qquad ②$$

①－②得 PQ 直线方程 $Dx+(E+2t)y+F+a^2=0$. 当 $y=0$ 时, $Dx+F+a^2=0$, 因圆 C_1 的圆心不在 MN 的中垂线上, 故 C_1 不在 y 轴上, $D\neq 0$, $x=-\dfrac{F+a^2}{D}$, 即直线 PQ 恒过定点 $\left(-\dfrac{F+a^2}{D},0\right)$.



(第 15 题)

练习十

1. **解** $\begin{cases} p=-(\sin\theta+\cos\theta) \\ q=\sin\theta\cdot\cos\theta \end{cases} \Rightarrow p^2=1+2q$,

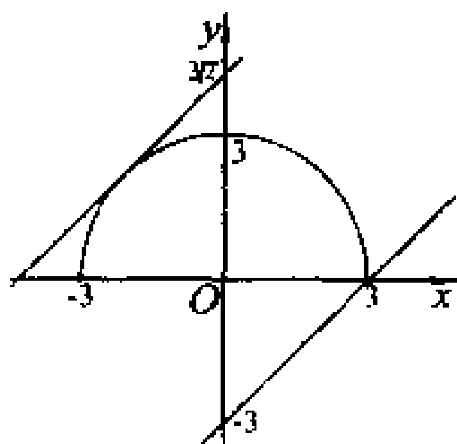
且 $-\sqrt{2}\leqslant p\leqslant\sqrt{2}$, 选(C).

2. **解** 设 A' 是 A 关于 O 的对称点, 则 AA' 是⊙O 的直径, 连 $A'P$ 及 OB, 则 OB 是 $\Delta APA'$ 的中位线, $|A'P|=2|OB|=2R$, 点 P 到定点 A' 的距离是定长 $2R$, 点 P 的轨迹为圆, 选(D).

3. **解** $2\log_2(1-y)=\log_2(x+3)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 1-y>0, \\ x+3>0, \\ (y-1)^2=(x+3) \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} y<1, \\ x>-3, \\ (y-1)^2=(x+3) \end{cases} \qquad 选(C).$$

4. **第** M 可变为 $x^2+y^2=9(0<y\leqslant 3)$, 把 $y=x+b$ 代入 $x^2+y^2=9$, 得 $2x^2+2bx+b^2-9=0$. 由 $\Delta=4b^2-4\cdot 2\cdot(b^2-9)=0$, 解得 $b=3\sqrt{2}$. 又当 $y=x+b$ 过点(3,0)时, 得 $b=-3$, 如图, 选(D).



(第 4 题)

5. **解** 取两直线的交点 O 为原点, 它们的角平分线为坐标轴建立直角坐标系. 设两给定直线方程为 $y=\pm kx(k>0)$, $P(x,y)$ 为轨迹上任一点, 则

$$\left(\frac{|kx+y|}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2+\left(\frac{|-kx+y|}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2=m^2.$$

化简得 $2k^2x^2+2y^2=m^2(1+k^2)$. $k\neq 1$ 时轨迹为椭圆, $k=1$ 时轨迹为圆, 选

(D).

6. **解** 设 $P(x,y)$ 为轨迹上任意一点，$A(x-\frac{a}{2},0)$、$B(x+\frac{a}{2},0)$、$C(0,y-\frac{b}{2})$、$D(0,y+\frac{b}{2})$. 因 A、B、C、D 四点共圆，有 $|OA|\cdot|OB|=|OC|\cdot|CD|$，即 $(x-\frac{a}{2})(x+\frac{a}{2})=(y-\frac{b}{2})(y+\frac{b}{2})$，所以 $x^2-y^2=\frac{1}{4}(a^2-b^2)$. 若 $a=b$，点 M 的轨迹为两直线，$a\neq b$ 时，点 M 的轨迹是双曲线，选(C).

7. **解** 抛物线 C 的顶点在 $(-2,0)$，$\frac{p}{2}=2$，由坐标平移公式知焦点为 $O(0,0)$，准线 l 为 $x=-4$，易知 l 为椭圆的左准线，而 $O(0,0)$ 为椭圆的一个焦点(左、右未定)，椭圆长轴在 x 轴上.

当 O 为椭圆左焦点时，椭圆中心坐标为 $(c,0)$，短轴端点坐标满足 $x=c$，$|y|=b$，O 到 l 距离即焦点到相应准线距离为 $\frac{b^2}{c}=4$，即 $b^2=4c$. 于是，有 $y^2=4x$.

当 O 为椭圆右焦点时，中心坐标为 $(-c,0)$，短轴端点坐标满足 $x=-c$，$|y|=b$. 此时 O 到 l 的距离应表示为 $\frac{a^2}{c}+c=4$，即 $a^2+c^2=4c$，又可化为 $b^2+2c^2=4c$，于是，有 $y^2+2x^2=-4x$，即 $(x+1)^2+\frac{y^2}{2}=1$，则椭圆短轴端点的轨迹方程为 $y^2=4x(y\neq0)$ 或 $(x+1)^2+\frac{y^2}{2}=1(y\neq0)$.

8. **解** 设动点 $P(x,y)$，点 $B(x_0,y_0)$ 有 $y_0^2=x_0+1$，由 $AP:PB=3:1$，利用定比分点公式得 $x=\frac{3+3x_0}{4}$，$y=\frac{1+3y_0}{4}$(这里不用 P 分 BA 成 $\lambda=\frac{1}{3}$，使运算简便). 则 $x_0=\frac{4x-3}{3}$，$y_0=\frac{4y-1}{3}$，并代入 $y_0^2=x_0+1$，得 $(\frac{4y-1}{3})^2=\frac{4x-3}{3}+1$，即 $(y-\frac{1}{4})^2=\frac{3}{4}x$，为所求的轨迹方程，它表示以 $(0,\frac{1}{4})$ 为顶点，以直线 $y=\frac{1}{4}$ 为对称轴，$p=\frac{3}{8}$ 的抛物线.

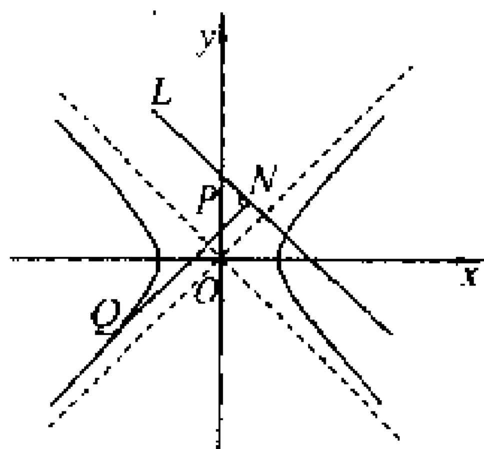
9. **解** 设点 $Q(x,y)$，点 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$，其中 $0\leqslant\theta<2\pi$，且 $\theta\neq0$、π.

由题设知 $A'P$ 直线的斜率为 $k_1=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+a}$，$AP$ 直线的斜率为 $k_2=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta-a}$. 因为 $A'Q\perp A'P$、$AQ\perp AP$，所以 $A'Q$ 的斜率为 $k_1'=-\frac{a\cos\theta+a}{b\sin\theta}$，$AQ$ 直线的斜率为 $k_2'=-\frac{a\cos\theta-a}{b\sin\theta}$，故 $A'Q$ 方程为 $y=-\frac{a\cos\theta+a}{b\sin\theta}(x+a)$，$AQ$ 方

程为 $y=-\frac{a\cos\theta-a}{b\sin\theta}(x-a)$，即 $b\sin\theta\cdot y=-(a\cos\theta+a)(x+a)$，$b\sin\theta\cdot y=-(a\cos\theta-a)(x-a)$. 两式相减，得 $2ax+2a^2\cos\theta=0$，$x=-a\cos\theta$. 因此，得 $y=-\frac{a^2}{b}\sin\theta$. 消去参数 θ，得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}=1$. 由于 $\theta\neq0,\pi$，所以 $y\neq0$. 因此，点 Q 的轨迹为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}=1$，但除去点 $(a,0)$ 及 $(-a,0)$.

10. **解** 如图所示，设 $P(x,y)$，$Q(x_0,y_0)$，$N(x',y')$. 由 $PN\perp L$，得 $k_{PN}=1$，由方程组

$$\begin{cases}y-y'=x-x'\\x'+y'=2\end{cases} \text{得} \begin{cases}x'=\frac{1}{2}(x-y+2)\\y'=\frac{1}{2}(-x+y+2)\end{cases} \quad ①$$



(第 10 题)

由点 P 为 QN 的中点及中点坐标公式，得

$$\begin{cases}x=\frac{x_0+x'}{2},\\y=\frac{y_0+y'}{2}.\end{cases} \quad ②$$

把①式代入②式，并解出 x_0，y_0，得

$$\begin{cases}x_0=\frac{3x+y-2}{2},\\y_0=\frac{x+3y-2}{2}.\end{cases} \quad ③$$

由于点 Q 在双曲线
$$x^2-y^2=1 \quad ④$$
上，故将③式代入④式，化简后即得点 P 的轨迹方程

$$2x^2-2y^2-2x+2y-1=0.$$

11. **解** 设 $P(x,y)$ 是轨迹上任意一点.

(i) a 若点 P 位于上半平面，由题设知 $\tan B=\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}$，而 $\tan B=-\tan\angle PBx=-k_{PB}=-\frac{y}{x-a}$，$\tan A=k_{PA}=\frac{y}{x+a}$，故 $-\frac{y}{x-a}=\frac{\frac{2y}{x+a}}{1-\left(\frac{y}{x+a}\right)^2}$.

显然 $y=0$ 不合题意，故上面方程可化简为 $y^2-(x+a)^2=2(x^2-a^2)$，整理得

$$\frac{(x+\frac{a}{3})^2}{\frac{4a^2}{9}}-\frac{y^2}{\frac{4a^2}{3}}=1. \qquad ①$$

由于点 P 在上半平面，且 $PA>PB$，故上式中的 $x>0$ 且 $y>0$.

(ii)显然轨迹关于 x 轴对称，故方程①还可表示当点 P 在下半平面时的轨迹.

综合(i),(ii)，点 P 的轨迹方程是

$$\frac{(x+\frac{a}{3})^2}{\frac{4a^2}{9}}-\frac{y^2}{\frac{4a^2}{3}}=1 \quad (x>0 \text{ 且 } y\neq 0).$$

它所表示的轨迹为双曲线的右半支，但不包括点$(\frac{a}{3},0)$.

12. **解** 如图所示，设点 $P(x,y)$，由题设 $x\geqslant 0$，直线 OA 的方程 $y=\tan\theta\cdot x$，即 $\tan\theta\cdot x-y=0$，直线 OB 的方程 $y=-\tan\theta\cdot x$，即 $\tan\theta\cdot x+y=0$，直线 AB 的方程 $x=h$，即 $x-h=0$，又由点 P 在 ΔAOB 内，$|PD|=\frac{\tan\theta\cdot x-y}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=x\sin\theta-y\cos\theta$，$|PE|=h-x_0$，

$|PF|=\frac{\tan\theta\cdot x+y}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=x\sin\theta+y\cos\theta$，再由题设 $|PD|\cdot|PF|=|PE|^2$，得 $x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=(h-x)^2$，即 $x^2\cos^2\theta-2hx+y^2\cos^2\theta+h^2=0$，所以

(第 12 题)

$$\left(x-\frac{h}{\cos^2\theta}\right)^2+y^2=\left(h\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)^2 \quad (\cos^2\theta\neq 0).$$

点 P 的轨迹是以$(\frac{h}{\cos^2\theta},0)$为圆心，以 $\frac{h\cdot\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 为半径的圆在等腰三角形内的一段圆弧.

13. **解** 设动点 $P(x_0,y_0)$、$B(x_1,y_1)$、$C(x_2,y_2)$、$\triangle POA$ 的重心 $Q(X,Y)$，显然 y_0,y_1,y_2 均大于零，又设$\frac{y_1}{y_2}=\lambda$，则

$$y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}. \qquad ①$$

设 $l: y=k(x-2)$，此方程与 $y=x^2+2$ 联立，消去 x 得 $y^2+(4k-k^2)y+6k^2=0$，根据韦达定理，有

$$\begin{cases} y_1+y_2=k^2-4k, \\ y_1y_2=6k^2, \end{cases}$$

再代入①式，得

$$\frac{2}{y_0}=\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{k-4}{6k}.$$

又 $k=\frac{y_0}{x_0-2}$，代入上式，得 $4x_0-y_0+4=0$，因 $X=\frac{x_0+2}{3}$，$Y=\frac{y_0}{3}$，故 $x_0=3X-2$，$y_0=3Y$，代入 $4x_0-y_0+4=0$ 得点 Q 的轨迹方程 $12X-3Y-4=0$.

（第 13 题）

按题设，$y^2+(4k-k^2)y+6k^2=0$ 有两相异实根，$\Delta=(4k-k^2)^2-24k^2>0$，故得 $k<4-2\sqrt{6}$或 $k>4+2\sqrt{6}$. 当 $k=4\pm2\sqrt{6}$时，$y_0=12\pm4\sqrt{6}$，$Y=4\pm\frac{4}{3}\sqrt{6}$，由这几个式子及 $k=\frac{y_0}{x_0-2}$，可得 $k=\frac{4Y}{Y-4}(Y\neq4)$，因而 $Y=\frac{4k}{k-4}=4+\frac{16}{k-4}$，可得 $4-\frac{4}{3}\sqrt{6}<Y<4$ 或 $4<Y<4+\frac{4}{3}\sqrt{6}$.

因此 ΔPOA 的重心 Q 的轨迹为直线 $12X-3Y-4=0$ 介于 $4-\frac{4}{3}\sqrt{6}<Y<4+\frac{4}{3}\sqrt{6}$间的一段，且除去点$(\frac{4}{3},4)$.

练习十一

1. **解** 依题设 $a=10$，$b=6$，故 $c=8$，进而知 P 到左焦点的距离为 $10e=10\cdot\frac{c}{a}=8$，故所求点 P 到右焦点的距离为 $2a-8=12$，选(C).

2. **解** 因 $9<k<25$，所以 $25-k>0$，$9-k<0$，$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$，即$\frac{x^2}{25-k}-\frac{y^2}{k-9}=1$，该方程所表示的曲线为双曲线，淘汰(A)、(C)，椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 中 $c=4$，$a=5$，双曲线中 $c'=4$，$a'=\sqrt{25-k}$，故准线不同，选(B).

3. **解** $(|k|-2)(5-k)<0$，解得 $k>5$ 或 $-2<k<2$，选(D).

4. **解** 曲线 $y^2=ax$ 关于点$(1,1)$的对称曲线为$(2-y)^2=a(2-x)$，由

$\begin{cases} y_2 = ax, \\ (2-y)^2 = a(2-x) \end{cases}$ 得 $y^2 - 2y + 2 - a = 0$，故 $y_1 + y_2 = 2$. 从而

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{a(y_1 - y_2)}{{y_1}^2 - {y_2}^2} = \frac{a}{y_1 + y_2} = \frac{a}{2} = 1,$$

有 $a = 2$. $a = 2$ 满足题设要求，选(A).

5. **解** 设点 P 的两条焦半径分别是 m, n. 依题设

$$|F_1F_2| = 12, \quad m + n = 20 \quad ①.$$

根据余弦定理有 $m^2 + n^2 - 2mn\cos 60° = 12^2$,

即 $(m+n)^2 - 3mn = 144$ ②.

由①,②可得 $mn = \frac{256}{3}$，所以 $S_{\triangle F_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot mn\sin 60° = \frac{64}{3}\sqrt{3}$，选(A).

6. **解** 方程 $y = ax^2 + bx + c$ 可变为 $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a})$，其准线方程为

$$y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac + 1}{4a}.$$

7. **解** 设 $P(x, y)$，$\frac{|PF_1| + |PF_2|}{|PO|} = t$，由 $|PF_1| = ex_1 + a$，$|PF_2| = ex_1 - a$，$|PF_1| + |PF_2| = 2ex_1$，可得 $\frac{2\sqrt{2}x_1}{\sqrt{2{x_1}^2 - a^2}} = t$，即 ${x_1}^2 = \frac{a^2t^2}{2t^2 - 8}$，因 ${x_1}^2 \geqslant a^2$，所以 $\frac{a^2t^2}{2t^2 - 8} \geqslant a^2 (a \neq 0)$，即 $\frac{t^2}{2t^2 - 8} \geqslant 1$，所以 $2 < t \leqslant 2\sqrt{2}$ 即为所求.

8. **解** 原方程可变为 $\frac{x^2}{\frac{1}{k}} - \frac{y^2}{\frac{8}{k}} = 1$，因焦点为 $(0, 3)$，故 $a^2 = -\frac{8}{k}$，$b^2 = -\frac{1}{k}$，$c^2 = \frac{-9}{k^2} = 3^2$，所以 $k = -1$.

9. **解** 设椭圆方程为 $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$，依题设有

$$\begin{cases} x_0 - \dfrac{a^2}{c} = 0, & ① \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}, & ② \\ \dfrac{(2 - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(1 - y_0)^2}{a^2 - c^2} = 1. & ③ \end{cases}$$

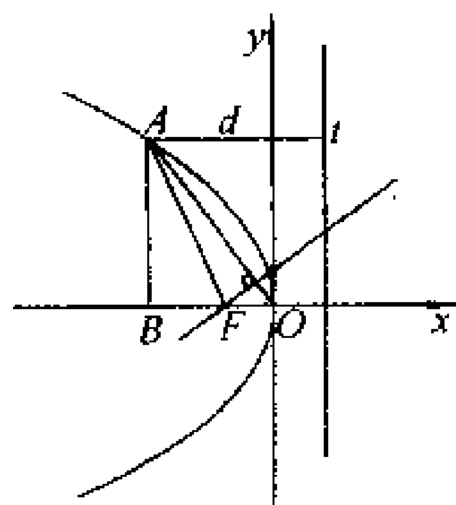
由①,②得 $x_0=2a$, $c=\frac{1}{2}a$. 代入③得

$$\frac{(x-2a)^2}{a^2}+\frac{(1-y_0)^2}{\frac{3}{4}a^2}=1. \qquad ④$$

由④有$\frac{(2-2a)^2}{a^2}\leqslant 1$,即 $3a^2-8a+4\leqslant 0$,所以$\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 2$, $a_{\max}=2$. 此时 $c=1$, $b=\sqrt{3}$, $y_0=1$, $x_0=4$,故所求椭圆方程为$\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$.

10. **解** 设双曲线的右顶点为 A,依题设,可令 $A(t^2+1,\ t)$. 注意到实轴长为4,故其中心为 $O'(t^2-1,t)$. 由题设知 O'位于右准线左方,故 $t^2-1<0$,即 $t\in(-1,1)$,又中心到准线距离为$\frac{a^2}{c}=1-t^2$,即 $c=\frac{4}{1-t^2}$,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{1-t^2}$. 当 $t=0$时, $e_{\min}=2$. 此时 $c=4$,双曲线虚轴长为 $2b=2\sqrt{c^2-a^2}=4\sqrt{3}$.

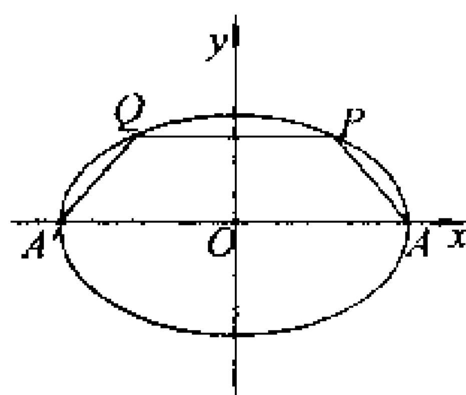
11. **解** 设 $A(x_1,y_1)$,由抛物线定义知$|AF|$等于 A 到准线的距离 d,而 $d=|x_1|+\frac{p}{2}$,抛物线方程为 $x=-\frac{7}{2}y^2$, $-\frac{p}{2}=-\frac{7}{8}$,且 $x\leqslant 0$,故$14\frac{7}{8}=|x_1|+\frac{7}{8}$,解得 $x_1=-14$. 进而有 $y=\pm 7$. 则 A 点的坐标为$(-14,7)$或$(-14,-7)$, $k_{OA}=-\frac{1}{2}$或 $k_{OA}=\frac{1}{2}$,直线 l 的斜率 $k=2$ 或 $k=-2$,方程为 $8x-4y+7=0$ 或 $8x+4y+7=0$.



(第11题)

12. **解** 两方程联立后消去 x 得 $y^2+3y+3m-9=0$ ①. 椭圆与抛物线有交点的充要条件是①的两根满足 $\Delta>0$,且根据韦达定理$(m+y_1)+(m+y_2)>0$, $(m+y_1)(m+y_2)>0$,解得 $m\in(3,\frac{15}{4})$.

13. **解** 如图,以椭圆中心为原点,长轴为 x 轴建立的直角坐标系,设椭圆方程得$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,设内接梯形的另一底的一个端点 P 的坐标为$(a\cos\varphi,b\sin\varphi)$($\varphi$ 为锐角),其面积为



(第13题)

$$S=(a\cos\varphi+a)b\sin\varphi$$

$$= ab(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

$$= 4ab\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{4ab}{\sqrt{3}}\sqrt{3\cos^6\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\leqslant \frac{4ab}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4^2}\cdot\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}+3\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}\times 4}$$

$$= \frac{9ab}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

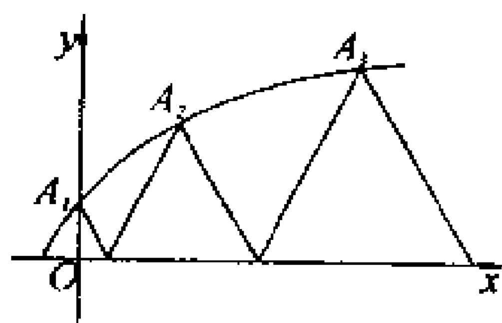
当且仅当 $\cos^2\frac{\varphi}{2}=3\sin^2\frac{\varphi}{2}$，即 $\tan^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{3}$，亦即 $\varphi=60°$时，椭圆内接梯形的面积最大，其最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

14. **解** 依题设，$|PF_1|^2=d|PF_2|$，即$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{d}{|PF_1|}=\frac{1}{e}$，故$|PF_1|=\frac{|PF_2|}{e}$. 又$|PF_1|=2a-|PF_2|$，故$|PF_2|=\frac{2ae}{1+e}$，$|PF_1|=\frac{2a}{1+e}$. 因$|PF_2|-|PF_1|=\frac{2a(1-e)}{1+3}\leqslant 2c$，所以$\frac{1-e}{1+e}\leqslant e$，解得 $e\leqslant -1-\sqrt{2}$或 $e\geqslant -1+\sqrt{2}$. 当$\sqrt{2}-1\leqslant e<1$时，以椭圆焦点 F_1 为圆心，以$\frac{2a}{1+e}$半径的圆与椭圆的交点P到F_2的距离$|PF_2|=2a-\frac{2a}{1+e}=\frac{2ae}{1+e}$，$d=\frac{1}{e}|PF_1|=\frac{2a}{e(1+e)}$满足$|PF_1|^2=d\cdot|PF_2|$.

15. **证明** 如图，建立坐标系，设第 n 个三角形的顶点坐标为(x,y)，则

$$x=\frac{1}{2}+3+5+\cdots+[(2n-1)-2]+\frac{1}{2}(2n-1)=n(n-1), \quad ①$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}(2n-1), \quad ②$$



(第 15 题)

消去 n，由①，②得顶点轨迹方程为：$y^2=3(x+\frac{1}{4})$，因此，各顶点位于同一条抛物线上，该抛物线顶点为$(-\frac{1}{4},0)$，$r=\frac{3}{2}$，所以焦点为 $F(\frac{1}{2},0)$，而 $A_n(n(n-1),\frac{\sqrt{3}}{2}(2n-1))$，故

$$|A_nF|=\sqrt{[n(n-1)-\frac{1}{2}]^2+[\frac{\sqrt{3}}{2}(2n-1)]^2}=n^2-n+1.$$

所以$|A_nF|$为整数.

16. **证明** $k<4$时,$4-k>0,9-k>0$,C_k是椭圆;$4<k<9$时,$4-k<0$,$9-k>0$,C_k是双曲线.

对于点$P(a,b)$,由

$$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1,$$

可得
$$k^2+(a^2+b^2-13)k+(36-4a^2-9b^2)=0.$$

设$f(k)=k^2+(a^2+b^2-13)k+(36-4a^2-9b^2)$,则$f(4)=-5b^2<0$,$f(9)=5a^2>0$,故$f(k)=0$的一根在区间$(-\infty,4)$内,另一根在区间$(4,9)$内,故总有一椭圆和一双曲线通过点$P(a,b)$.

练习十二

1. **解** 设$M(x_1,y_1)$,$M(x_2,y_2)$,则$\frac{x_1^2}{4}-{y_1}^2=1$,$\frac{x_2^2}{4}-y_2^2=1$,两式相减得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}-(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0.$$

注意到$\frac{x_1+x_2}{2}=3$,$\frac{y_1+y_2}{2}=-1$,代入上式得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4}$.故直线$l$的方程为$y+1=-\frac{3}{4}(x-3)$,即$3x+4y-5=0$.

2. **解** 设$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,于是有$\frac{y_1+y_2+8}{3}=0$,有$y_1+y_2=-8$,BC的斜率为

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{32}-\frac{y_1^2}{32}}=\frac{32}{y_1+y_2}=-4.$$

3. **解** 以焦点为极点,抛物线的轴为极轴,建立极坐标系,可设$A(\rho_1,\theta)$、$B(\rho_2,\theta+\pi)$、$C(\rho_3,\theta+\frac{\pi}{2})$、$D(\rho_4,\theta+\frac{3\pi}{2})$,则$|AB|=\rho_1+\rho_2=\frac{p}{1-\cos\theta}+\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{2p}{\sin^2\theta}$,同样有$|CD|=\frac{2p}{\sin^2(\theta+\frac{\pi}{2})}$,故$|AB|+|CD|=\frac{2p}{\sin^2\theta}+\frac{2p}{\cos^2\theta}=$

$\frac{2p}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{8p}{\sin^2 2\theta}\geqslant 8p$，当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ 时取等号. $|AB|$ 与 $|CD|$ 和的最小值为 $8p$.

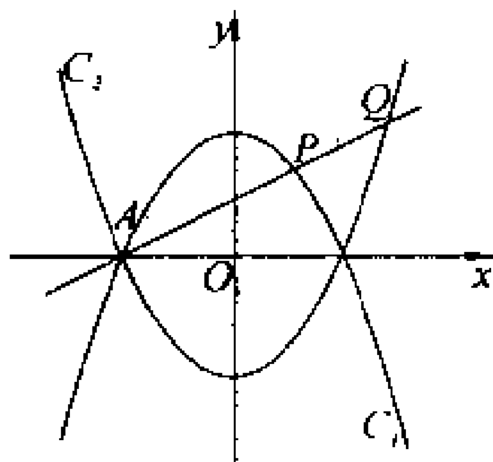
4. **解** 依题设，有 $F(-2,0)$，$l:x=-\frac{3}{2}$，设椭圆中心为 $C(x_0,0)$，则 $x_0<-2$，椭圆截直线 $y=kx+3$ 所得的弦被 x 轴平分，惟有该直线过椭圆中心，于是 $kx_0+3=0$，$x_0=-\frac{3}{k}$. 由 $-\frac{3}{k}<-2$，得 $0<k<\frac{3}{2}$.

5. **解** 如图，C_1、C_2 的交点 A 坐标为 $(-1,0)$，过 A 的直线参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）. 因为 $y=x^2-1$，$y=1-x^2$，得 $y=(x^2-1)(1-x^2)$，直线的参数方程代入，得

$$t^2[t^2\cos^4\alpha-4t\cos^2\alpha+4\cos^2\alpha-\sin^2\alpha]=0,$$

$t=0$ 是点 A 所对应的参数，由

$$t^2\cos^4\alpha-4t\cos^2\alpha+4\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0,$$



（第 5 题）

可知
$$|AP|\cdot|AQ|=t_1t_2=\frac{4\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$$
$$=sec^2\alpha(4-\tan^2\alpha)$$
$$=(1+\tan^2\alpha)(4-\tan^2\alpha)$$
$$=-(\tan^2\alpha-\frac{3}{2})^2+\frac{25}{4}.$$

当 $\tan^2\alpha=\frac{3}{2}$ 时，$AP\cdot AQ$ 有最大值 $\frac{25}{4}$. 显然，此时 $\alpha=A\text{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$，或 $\alpha=\pi-\text{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

6. **解** 因为抛物线关于 x 轴对称，三条高线过焦点，A、B 关于 x 轴对称，$\triangle ABO$ 是一等腰三角形，作 AO 的中垂线 MN，交 x 轴于 C 点，又是 OX 是 AB 的中垂线，C 是 $\triangle ABO$ 外接圆的圆心，OC 是外接圆的半径. 设 $A(x_1,\sqrt{2px_1})$、$B(x_1,-\sqrt{2px_1})$，连接 BF，则 $BF\perp AO$. 因 $k_{BF}=\frac{\sqrt{2px_1}}{\frac{p}{2}-x_1}$，$k_{AO}=\frac{\sqrt{2px_1}}{x_1}$，故 $\frac{\sqrt{2px_1}}{\frac{p}{2}-x_1}\cdot\frac{\sqrt{2px_1}}{x_1}=-1$，解得 $x_1=\frac{5}{2}p$，$x_2=0$（舍去），于是 AO 的中点为 $(\frac{x_1}{2},\frac{\sqrt{2px_1}}{2})$，且 $MN/\!/BF$. 因而直线 MN 的方程为

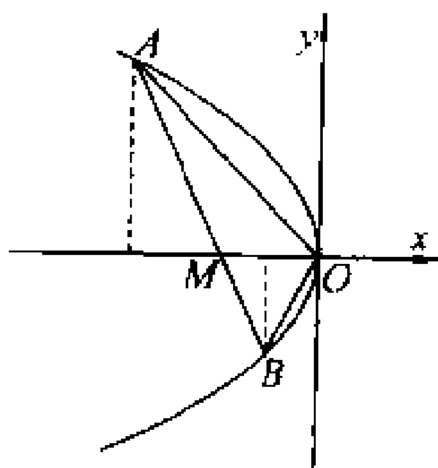
$$y-\frac{\sqrt{2px_1}}{2}=\frac{\sqrt{2px_1}}{\frac{p}{2}-x_1}\left(x-\frac{x_1}{2}\right).$$

把 $x_1=\frac{5}{2}p$ 代入得 $4\sqrt{5}x-9\sqrt{5}+8y=0$,则有 $C(\frac{9}{4}p,0)$,$\triangle ABO$ 外接圆半径为 $OC=\frac{9}{4}p$,于是得到圆的方程$(x-\frac{9}{4}p)^2+y^2=(\frac{9}{4}p)^2$,即 $x^2+y^2-\frac{9}{2}\cdot px=0$.

7. **解** (1)设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.则 $x_1=y_1^2$,$x_2=-y_2^2$,有

$$k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1y_2}{y_1^2y_2^2}=\frac{1}{y_1y_2}.$$

y_1,y_2 为方程组$\begin{cases}y^2=-x,\\y=k(x+1)\end{cases}$消去 x 后的一元二次方程的两个根,此方程为 $ky^2+y-k=0$,显见 $y_1\cdot y_2=-1$,即 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$,故 $OA\perp OB$.



(第 7 题)

(2)如图,由于直线 $y=k(x+1)$恒过 $M(-1,0)$,则 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot|y_2-y_1|$,即$\sqrt{10}=\frac{1}{2}|y_1-y_2|$,

又根据韦达定理得$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=\frac{1}{k^2}+4$,故 $40=\frac{1}{k^2}+4$,$k=\pm\frac{1}{6}$.

8. **证明** 由$(2x^2-3x+3)-x^2=x^2-3x+3>0$知曲线 C_2 在曲线 C_1 上方.

设倾斜角为 α 的直线方程为

$$\begin{cases}x=m+t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}(t\text{ 为参数}),$$

将上式代入 $y=x^2$,得

$$t^2\cos^2\alpha+(2m\cos\alpha-\sin\alpha)t+m^2=0.$$

有 $t_1+t_2=\frac{\sin\alpha-2m\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$,$t_1,t_2$ 是 A、D 两点对应的 t 值,同理可得 $t_3+t_4=\frac{\sin\alpha+3\cos\alpha-4m}{2\cos^2\alpha}$,$t_3,t_4$ 是 B、C 两点对应的 t 值.于是

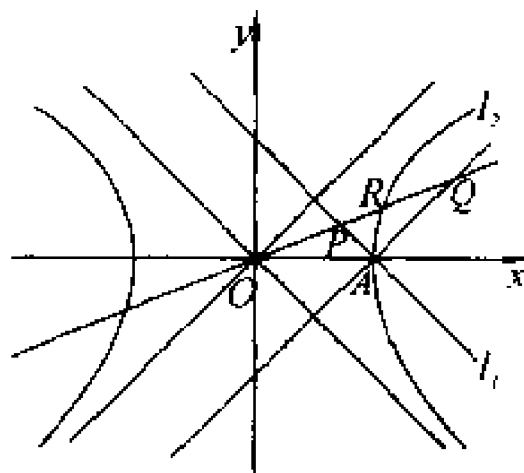
$$\begin{aligned}|AB|-|CD|&=|t_3-t_1|-|t_4-t_2|\\&=(t_3-t_1)-(t_4-t_2)\end{aligned}$$

$$=(t_3+t_4)-(t_1+t_2)$$
$$=\frac{(\sin\alpha+3\cos\alpha-4m\cos\alpha)-(2\sin\alpha-4m\cos\alpha)}{2\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{3\cos\alpha-\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}.$$

上式与变量 m 的值无关,故 $|AB|-|CD|$ 为定值.

9. **解** 如图,依题设知直线 l_1 与直线 l_2 的方程分别为 $y=-\frac{b}{a}(x-a)$ 及 $y=\frac{b}{a}(x-a)$,故曲线 $l_1\cup l_2$ 方程为 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x-a)^2$.设 OP 所在直线 l 的倾角为 α,方程为

$$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}(t\text{ 为参数}).$$



(第 9 题)

代入 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x-a)^2$ 得

$$t^2(a^2\sin^2\alpha-b^2\cos^2\alpha)+2ab^2\cos\alpha\cdot t-a^2b^2=0.$$

依题设 $$|OP|\cdot|OQ|=|t_1\cdot t_2|=\left|\frac{-a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha-b^2\cos^2\alpha}\right|.\quad ①$$

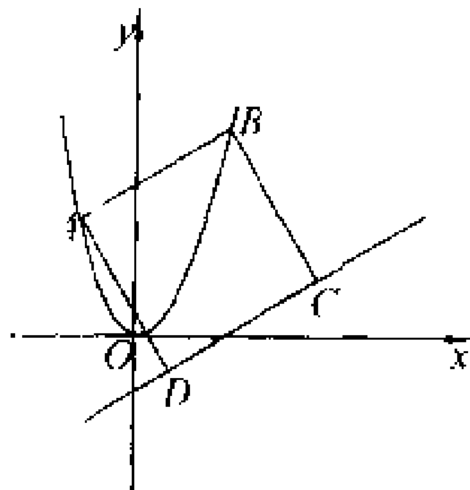
又把 OP 的参数方程代入双曲线方程,得 $(b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha)t^2=a^2b^2$,有

$$|OR|^2=|t|^2=\left|\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha}\right|.\quad ②$$

由①、②知 $|OP|\cdot|OQ|=|OR|^2$,即 OP、OR、OQ 成等比数列.

10. **解** 如图,可设抛物线上的动点 $A(t_1,t_1^2)$、$B(t_2,t_2^2)$,由 $AB\parallel CD$ 可得 $\frac{t_1^2-t_2^2}{t_1-t_2}=t_1+t_2=1$.又

$$d^2=|AB|^2=(t_1-t_2)^2+(t_1^2-t_2^2)^2$$
$$=(t_1-t_2)^2\cdot[1+(t_1+t_2)^2]$$
$$=[(t_1+t_2)^2-4t_1t_2]\cdot[1+(t_1+t_2)^2].$$



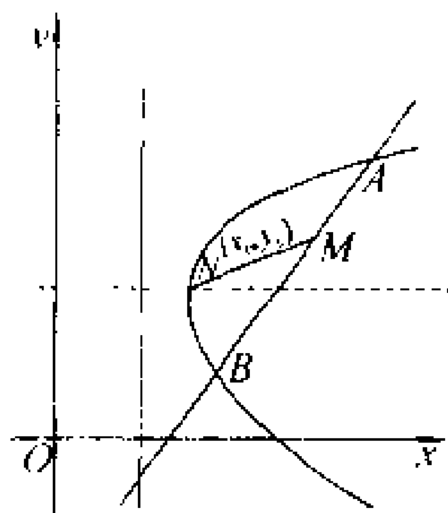
(第 10 题)

将 $t_1+t_2=1$ 代入得 $d^2=2-8t_1t_2$,即 $t_1\cdot t_2=\frac{2-d^2}{8}$ ①,而 $d=|AD|=\frac{|t_1-t_1^2-4|}{\sqrt{2}}$,将 $t_1+t_2=1$ 代入得 $d=\frac{|t_1t_2-4|}{\sqrt{2}}$ ②,由①、②得 $d^2-8\sqrt{2}d+30=0$,解得 $d_1=5\sqrt{2}$,d_2

$=3\sqrt{2}$,所以,正方形 $ABCD$ 的边长 d 为 $5\sqrt{2}$或$3\sqrt{2}$.

11. **解** 设 P 点坐标为(x_1,y_1),则过 P 向圆 $x^2+y^2=b^2$ 所引两切线切点弦所在直线方程为 $x_1x+y_1y=b^2$,M 点坐标为$(\frac{b^2}{x_1},0)$,N 点坐标为$(0,\frac{b^2}{y_1})$,有 $S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{|x_1|}\cdot\frac{b^2}{|y_1|}=\frac{b^4}{2|x_1y_1|}$.设 $P(a\cos\theta_1,b\sin\theta_1)$,$|x_1y_1|=ab|\sin\theta_1\cos\theta_1|$ $=\frac{1}{2}ab|\sin2\theta_1|\leqslant\frac{ab}{2}$,当 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$时,$S_{\triangle MON}$的最小值为$\frac{b^3}{a}$.

12. **解** 如图,因准线为 $x=\frac{3}{4}$,可设抛物线方程为$(y-y_0)^2=2a(x-x_0)$ $(a\in\mathbf{R})$.由定义知 $x_0-\frac{3}{4}=\frac{a}{2}$,所以 $2a=4x_0-3$. ①



(第 12 题)

由直线与抛物线相关,考虑方程组 $\begin{cases}y=x-1,\\(y-y_0)^2=2a(x-x_0),\end{cases}$ 消去 x,并把①式代入得

$$(y-y_0)^2=(4x_0-3)(y+1-x_0),$$

即 $$y^2+(3-4x_0-2y_0)y+y_0^2-(4x_0-3)(1-x_0)=0. \quad ②$$

因 $k_{AB}=1$,$|AB|=3\sqrt{2}$,所以$|AB|=\frac{|y_1-y_2|}{\sin45^\circ}$,有$|AB|=\sqrt{2}|y_1-y_2|=3\sqrt{2}$,即 $|y_1-y_2|=3$ ③ 因

$$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2,$$

根据韦达定理由②可得

$$9=(y_1-y_2)^2=(3-4x_0-2y_0)^2+4\cdot(4x_0-3)(1-x_0)-4y_0^2. \quad ④$$

设 AB 中点为 $M(x',y')$,则 $y'=x'-1$,且 $y'=\frac{y_1+y_2}{2}$.依题设,有

$$\frac{y'-y_0}{x'-x_0}=\frac{1}{5}. \quad ⑤$$

由②式得 $y'=\frac{4x_0+2y_0-3}{2}$,进而 $x'=y'+1=\frac{4x_0+2y_0-1}{2}$,代入⑤得

$$5(\frac{4x_0+2y_0-3}{2}-y_0)=\frac{4x_0+2y_0-1}{2}-x_0,$$

代简得 $$y_0=9x_0-7. \quad ⑥$$

把⑥代入④得$|4x_0-3|=1$,故$x_0=1$或$x_0=\frac{1}{2}$.

当$x_0=1$时,$y_0=2$,$2a=1$,所求抛物线方程为$(y-2)^2=x+1$;当$x_0=\frac{1}{2}$时,$y_0=-\frac{5}{2}$,$2a=-1$,抛物线方程为$(y+\frac{5}{2})^2=-(x-\frac{1}{2})$

练习十三

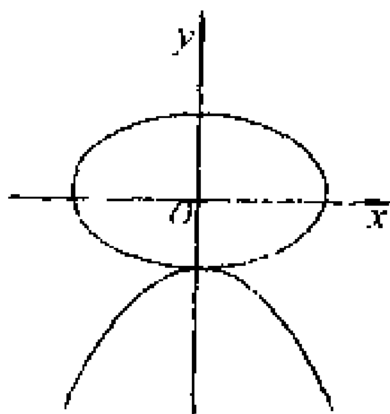
1. **解** $(2+2i)^7=2^7(1+i)^7=2^7[(1+i)^2]^3(1+i)=2^{10}(1-i)(-1+\sqrt{3}i)^3$

$$=2^3(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^3=2^3,$$

所以原式$=128-128i$.

2. **解** $z=w$,根据w的性质,有$w^n+w^{n+1}+w^{n+2}=0$,所以 $1+z+z^2+\cdots+z^{1992}=1$.

3. **解** 如图,满足方程组的复数z在复平面上对应的点的轨迹分别是椭圆和双曲线的一支,二者交点是$(0,-4)$.所以原方程组的解是$z=-4i$.



(第3题)

4. **解** 方程左端是个非负数,所以$2(z+i)^2-1\geqslant 0$,$z+i\in\mathrm{R}$.进而可知$z+i-3\in\mathrm{R}$,$|z+i-3|^2=(z+i-3)^2$,所以原方程可变为$2(z+i-3)^2=2(z+i)^2-1$,解得$z=\frac{19}{12}-i$.

5. **解** 因$p\in\mathrm{R}$,故$x^2+2px+1=0$的两个虚根互为共轭复数,即$\alpha=\overline{\beta}$,α,β在复平面上对应的点关于实轴对称,又由韦达定理,$\alpha\beta=1$,即$\overline{\alpha\alpha}=1$.$|\alpha|=1$;同理$|\beta|=1$,所以$\alpha$,$\beta$在复平面上对应的点在单位圆上.

易知 $\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$\beta=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,所以$p=-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$.

6. **解** 作以$\frac{3+\sqrt{7}i}{4}$,$\frac{3-\sqrt{7}i}{4}$为根的一元二次方程$2x^2-3x+2=0$.再由$f(x)=(2x^2-3x+2)(3x-5)-1$,可得$f(x_1)=(2x_1{}^2-3x_1+2)(2x_1-5)-1=-1$.

7. **解** (i)当$\Delta=1-4a\geqslant 0$,即$a\leqslant\frac{1}{4}$,$\beta\in\mathrm{R}$,由$|\beta+1|=1$知$\beta=0$或$\beta=-2$,分别代入已知方程中,求得$a=\frac{1}{4}$($\beta=0$时,舍去);

(ii)当 $\Delta<0$,即 $a>\frac{1}{4}$ 时,β 是虚数,由虚根成对定理,$\overline{\beta}$ 也是方程的根,根据韦达总理有 $\beta+\overline{\beta}=-\frac{1}{a}$,$\beta\cdot\overline{\beta}=\frac{1}{a}$.因 $|\beta+1|=1$,故 $|\beta+1|=1$,即 $(\beta+1)\cdot(\overline{\beta}+1)=\beta\cdot\overline{\beta}+\beta+\overline{\beta}+1=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+1=1$.说明 $|\beta+1|=1$,对任意的 β 成立,于是 $\Delta<0$ 时,$a>\frac{1}{4}$.

综上所述,a 的取值范围为 $a\geqslant\frac{1}{4}$

8. **解** 设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,则 $x^2+y^2=1$.又

$$z^2+z=(x^2-y^2+x)+(2xy+y)i<0,$$

故 $2xy+y=0,x^2-y^2+x<0$.由 $2xy+y=0$,得 $y=0$ 或 $x=\frac{1}{2}$.若 $y=0$,则 $x^2=1,x=\pm1$,这时 $x^2-y^2+x<0$ 不成立;若 $x=-\frac{1}{2}$,则 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.这时 $x^2-y^2+x=-1<0$.故 $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

9. **解** 由 $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 知 $w^3=1$,有 $w^2+w+1=0$.因此,满足 $w^{2k}+1+(w+1)^{2k}=0$ 即满足 $w^{2k}+w^k+1=0$.当 $k=3m(m\in\mathbf{N})$时,$w^{2k}+w^k+1=3$;当 $k=3m+1(m=0,1\cdots)$时,$w^{2k}+w^k+1=(w^3)^{2m}\cdot w^2+(w^3)^m\cdot w+1=w^2+w+1=0$;当 $k=3m+2(m=0,1\cdots)$时,$w^{2k}+w^k+1=(w^3)^{2m}\cdot w^3\cdot w+(w^3)^m\cdot w^2+1=w+w^2+1=0$.由 1 至 100 的正常整数中,被 3 整除的有 33 个.满足题设要求的正整数有 67 个.

10. **解** 依题设,有 $3z_1{}^2=-z_2{}^2$,即 $z_2=\pm\sqrt{3}iz_1$.又因 $a,b\in\mathbf{R}^+$,$\frac{\sqrt{3}}{2}a>0$.$-3\sqrt{3}b<0,a+1>0,b+2>0$,所以只能是 $z_2=\sqrt{3}iz_1$,即 $-3\sqrt{3}b+(b+2)i=-\sqrt{3}(a+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}ai$,所以 $\begin{cases}-3\sqrt{3}b=-\sqrt{3}(a+1),\\ b+2=\frac{3}{2}a.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$ 于是 $z_1=\sqrt{3}+3i,z_2=-3\sqrt{3}+3i$,有 $z_1\cdot z_2=-18-6\sqrt{3}i$,所以 $\overline{z_1\cdot z_2}=-18+6\sqrt{3}i$.

11. **解** 设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,依题设,有

$$\begin{cases}1<x+\dfrac{10x}{x^2+y^2}\leqslant6, & ①\\ y-\dfrac{10y}{x^2+y^2}=0. & ②\end{cases}$$

由②得 $y=0$ 或 $x^2+y^2=10$. 把 $y=0$ 代入①有

$$1<x+\frac{10}{x}\leqslant 6. \quad ③$$

把 $x^2+y^2=10$ 代入①有

$$1<2x\leqslant 6. \quad ④$$

因 $|x+\frac{10}{x}|\geqslant 2\sqrt{10}>6$, 由(i)知③无解; ④中, 因为 $x\in Z$, 所以 $x=1$, 或 $x=2$, 或 $x=3$. 分别代入 $x^2+y^2=10$ 中, 得 $y=\pm 3$ 或 $y=\pm 2\sqrt{2}$(舍), 或 $y=\pm 1$. 所以所求的复数 $z=1\pm 3i$ 或 $z=3\pm i$.

12. **证明** 假设方程有一实根为 α, 代入方程有

$$\begin{cases}\alpha^2+\lambda\alpha+1=0,\\ -\alpha^2+\alpha+\lambda=0,\end{cases} \quad \text{解得}\begin{cases}\alpha=-1,\\ \lambda=2.\end{cases}$$

这表明当 $\lambda=2$ 时方程有一个实根 $\alpha=-1$, 此时方程另一根是虚数 $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$. 所以, 原方程有两个虚根的充要条件是 $\lambda\neq 2$.

13. **解** 依题设, 令 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $z_2=\cos\beta+i\sin\beta$(其中 $\alpha\geqslant\beta$, $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$). 由 $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 可得 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$ ①, $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ②

①^2+②^2 得 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$. 则 $\alpha-\beta=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$. 把 $\alpha=\beta+\frac{2\pi}{3}$ 代入①, ②得

$\cos\beta=1$, $\sin\beta=0$, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 根据对称性 $z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 或 $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=1$.

14. **解** 依题设 α,β,λ 为互异复数.

(i) 若 $\alpha\beta\gamma=0$. 不妨设 $\alpha=0$, 则 $\beta\gamma\neq 0$, 于是 $\beta\gamma=\beta$ 或 $\beta\gamma=\gamma$. 故 $\gamma=1$ 或 $\beta=1$. 又 $\beta^2,\gamma^2\in M$, 所以 $\beta^2=1$ 或 $\gamma^2=1$. β,γ 中有一个为 1, 另一个为 -1. 此时 $M=\{0,1,-1.\}$

(ii) 若 $\alpha\beta\gamma\neq 0$. 则 α、β、γ 无一为零. 依题设 α^2, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ 是三个互异复数且均为 M 中的元素. 所以 $M_1=\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{\alpha^2,\alpha\beta,\alpha\gamma\}$. 于是 $\alpha\beta\gamma=\alpha^2\cdot\alpha\beta\cdot\alpha\gamma$. 有 $\alpha^3=1$. 同理 $\beta^3=1$, $\gamma^3=1$. 此时 $M=\left\{1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

综上所述, $M=\{0,1,-1\}$ 或 $\{1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$.

15. **证明** 设 $p+qi$ 是 z 的平方根($p,q\in R$), 即

$$(p+qi)^2=\sum_{k=1}^{n} z_k=\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k i)^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-y_k^2)+2i\sum_{k=1}^{n}x_k y_k.$$

得
$$\begin{cases} p^2-q^2=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k^2-y_k^2), & ① \\ pq=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k y_k. & ② \end{cases}$$

假若$|p|>\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$,则

$$p^2>\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^2\geqslant\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2. \qquad ③$$

由①,③知 $$q^2>\sum_{k=1}^{n}y_k^2. \qquad ④$$

由②,③,④得$\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k y_k\right)^2>\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2\right)$,与柯西不等式矛盾,故命题成立.

练习十四

1. **解** $\frac{z-1}{z}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,解得$z=1+\frac{\sqrt{3}}{3}i$.故$\bar{z}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}i$.
$\arg(\bar{z})=\frac{11}{6}\pi$.

2. **解**
$$\begin{aligned} z&=2\cos\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{3\pi}{4}+i+i\cos\frac{3\pi}{4}\right)\\ &=2\cos\frac{\pi}{8}\left[2\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+i\left(1+\cos\frac{3\pi}{4}\right)\right]\\ &=2\cos\frac{\pi}{8}\left(2\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+i\cdot 2\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)\\ &=4\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}\left(\sin\frac{3\pi}{8}+i\cos\frac{3\pi}{8}\right).\\ &=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\\ &=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right).\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} z^{12}&=(\sqrt{2})^{12}\left(\cos\frac{12\pi}{8}+i\sin\frac{12\pi}{8}\right)\\ &=64\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-64i.\end{aligned}$$

3. **解** 设$z=x+yi$,x、$y\in R$,则$\frac{y}{x+1}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\frac{y}{x-1}=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$,

且 $y>0$.解得 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{\sqrt{3}}{2}, z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

4. **解** 由于 $1, a+bi, b+ai$ 成等比数列,有 $(a+bi)^2=b+ai$.故 $\begin{cases}a^2-b^2=b,\\2ab=a.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$.所以,公比 $q=z_2=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,即 $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ 或 $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$.由 $S_n=0$,有 $q^n=1$,即 $\cos\frac{\pi}{6}n+i\sin\frac{\pi}{6}n=1$,或 $\cos\frac{5n\pi}{6}+i\sin\frac{5n\pi}{6}=1$.所以 $\frac{n}{6}\pi=2k\pi$,或 $\frac{5n\pi}{6}=2k\pi$, $n=12k(k\in\mathrm{N})$, n 最小值为 12.此时, $z_1z_2\cdots z_{12}=z_1^{12}\cdot 8^{1+2+\cdots+11}=q^{66}=\cos 11\pi+i\sin 11\pi=-1$.

5. **解** 依题设,有

$$\left[2(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11\pi}{6})\right]^m=\left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\right]^n,$$

即 $$2^m\left(\cos\frac{11m}{6}\pi+i\sin\frac{11m}{6}\pi\right)=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

由复数相等的充要条件

$$\begin{cases}2^m=2^{\frac{n}{2}},\\\frac{11m\pi}{6}=\frac{n\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathrm{Z})\end{cases}$$

可得 $n=2m, m=\frac{3k}{2}$.当 $k=2$ 时, m,n 分别取最小值 3 和 6.所求乘积为 18.

6. **解** 由复数乘法的几何意义知,等式左端表示复数 $(3+i)(5+i)(7+i)(8+i)=650(1+i)$ 的一个辐角.因 $0<\arctan\frac{1}{3},\arctan\frac{1}{5},\arctan\frac{1}{7},\arctan\frac{1}{8}<\frac{\pi}{4}$,所以 $0<\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}<\pi$.所以,这四个复数的辐角主值之和仍是复数 $650(1+i)=650\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ 的辐角主值.即所求和为 $\frac{\pi}{4}$.

7. **解** $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ 是 1 的一个五次方根,故方程 $x^5-1=0$ 的五个根为 $1,z,z^2,z^3,z^4$,从而, $x^5-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)$.又 $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.故

$$(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)=x^4+x^3+x^2+x+1.$$

令 $x=1$,即得 5 为所求.

8. **解** (1) $r=|z|=\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}$. 令 $\cos\varphi=|\cos t|,\sin\varphi=|\sin t|,\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$,则

$$|\cos t|+|\sin t|=\cos\varphi+\sin\varphi=\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})\leqslant\sqrt{2}.$$

所以 $r\leqslant\sqrt{2}$

(2) 因 $\tan\theta=\frac{\sqrt{|\sin t|}}{\sqrt{|\cos t|}}=\sqrt{|\tan t|}$, 且 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$, 所以 $0\leqslant\tan\theta\leqslant1$, 即 $0\leqslant|\tan t|\leqslant1$, $-1\leqslant\tan t\leqslant1$. 故 $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

9. **解**

$$\begin{aligned}\mu&=\frac{1-[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^4}{1+(\cos\theta+i\sin\theta)^4}\\&=\frac{1-[\cos(-4\theta)+i\sin(-4\theta)]}{1+\cos4\theta+i\sin4\theta}\\&=\frac{2\sin^2 2\theta+2i\sin2\theta\cos2\theta}{2\cos^2 2\theta+2i\sin^2\theta\cos2\theta}\\&=\tan2\theta(\sin4\theta+i\cos4\theta).\end{aligned}$$

所以 $|u|=|\tan2\theta|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,注意到 $\theta\in(0,\pi)$,有

(i) 当 $\tan2\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $\theta=\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{7}{12}\pi$. 这时,有 $\mu=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$,得 $\arg\mu=\frac{\pi}{6}$.

(ii) 当 $\tan2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,可得 $\theta=\frac{5\pi}{12}$ 或 $\frac{11\pi}{12}$,这时

$\mu=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$, $\arg\mu=\frac{11\pi}{6}>\frac{\pi}{2}$ 不合题意,舍去.

综上所述, $\theta=\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}$.

10. **解** 假定 $\frac{(i-1)z}{i(z-2)}=k(k\in\mathbf{R})$,则

$$\frac{z}{z-2}=\frac{k}{\sqrt{2}}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right].$$

当 $k>0$ 时, $\arg z-\arg(z-2)=-\frac{\pi}{4}$,此时所求轨迹为以 OA 为弦,向上使 $\angle OPA=\frac{\pi}{4}$ 的圆弧(不包括端点);

当 $k<0$ 时，$\qquad \dfrac{z}{z-2}=\dfrac{-k}{\sqrt{2}}\left[\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

此时，所求轨迹为以 OA 为弦向下 $\angle OPA=\dfrac{3\pi}{4}$ 的圆弧(不包括端点).

当 $k=0$ 时，所求轨迹即为原点.

综上所述，所求轨迹是以点 $M(1,1)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆，除去点 $A(2,0)$.

11. **解** $A+Bi=(\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n})+\cdots+(\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n})^{n-1}$

$$=\frac{(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n})-(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n})^{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n}}=i\cot\frac{\pi}{2n}.$$

根据复数相等的条件，$A=0$，$B=\cot\dfrac{\pi}{2n}$.

12. **解** 设 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$z_2=k(\cos\beta+i\sin\beta)$，$z_3=(2-k)(\cos\gamma+i\sin\gamma)$，依题设，有

$$\begin{cases}\cos\alpha+k\cos\beta+(2-k)\cos\gamma=0, & ①\\ \sin\alpha+k\sin\beta+(2-k)\sin\gamma=0. & ②\end{cases}$$

由①，②得

$$\begin{cases}-\cos\alpha=k\cos\beta+(2-k)\cos\gamma, & ③\\ -\sin\alpha=k\sin\beta+(2-k)\sin\gamma. & ④\end{cases}$$

$③^2+④^2$ 得

$$\cos(\beta-\gamma)=1+\frac{3}{2(k-1)^2-2}. \qquad ⑤$$

显然，当 $k=1$ 时，$\cos(\beta-\gamma)$ 取最大值 $-\dfrac{1}{2}$ 因 $-1\leqslant\cos(\beta-\gamma)\leqslant1$，故 $-2\leqslant\dfrac{3}{2(k-1)^2-2}\leqslant0$，解得 $\dfrac{1}{2}\leqslant k\leqslant\dfrac{3}{2}$. 当 $k=\dfrac{1}{2}$ 或 $k=\dfrac{3}{2}$ 时，$\cos(\beta-\gamma)$ 取得最小值 -1.

13. **证明** 先证必要性. 设 w 是方程 $z^{n+1}-z^n-1=0$ 的一个模为 1 的复根，则

$$w^{n+1}-w^n-1=0,$$

从而有 $\qquad |w^n|\,|w-1|=1.$

因$|w|=1$,故$|w-1|=1$.这说明 w 对应点既在单位圆上又在以(1,0)为圆心,1 为半径的圆上,w 只能是$e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$,于是

$$1=w^n(w-1)=e^{\pm i\frac{(n+2)\pi}{3}},$$

故$\frac{(n+2)\pi}{3}=2k\pi(k\in Z)$,即 $n+2=6k(k\in Z)$,表明 $n+2$ 可被 6 整除.

再证充分性.若 $n+2$ 可被 6 整除,容易验证 $w=e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$均是原方程的根,且$|w|=1$.

练习十五

1. **解** $|(1+i)z^3+iz|\leqslant|(1+i)z^3|+|iz|$

$$\begin{aligned}&=|1+i|\cdot|z^3|+|i|\cdot|z|\\&=\sqrt{2}\cdot|z|^3+|z|\\&\leqslant\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}+4}{8}.\end{aligned}$$

当 $\arg z=\frac{\pi}{8}$时且$|z|=\frac{1}{2}$时,上式可取等式,所求值域为$[0,\frac{\sqrt{2}+4}{8}]$.

2. **解** 复数 z 对应的点的轨迹为连结两点$A(0,1)$与 $B(0,-1)$的线段,问题即为求线段 AB 上的点到点$(-1,-1)$距离的最小值,所求最小值为两点$(-1,-1)$,$(0,-1)$间的距离 1.

3. **解** 因 $a+b+c+d=7+9=16$,有$(a+c)^2+(b+d)^2\geqslant\frac{1}{2}(a+c+b+d)^2=128$,故所求最小值为 $8\sqrt{2}$.

4. **解** 依题设得,$z^3=-|z|^2+10i$,① 进而有 $\overline{z}^3=-|z|^2-10i$.② 由①,②得

$$(z\cdot\overline{z})^3=|z|^4+100.$$

即$|z|^6-|z|^4-100=0$,于是$(|z|^2-5)(|z|^4+4|z|^2+20)=0$,有$|z|=5$. ①变为 $z^3+5-10i=0$,其所有根之积为$-5+10i$.

5. **证明** $|z_1-\overline{z}_2|=|1-z_1z_2|$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow(z_1-\overline{z}_2)(\overline{z}_1-z_2)=(1-z_1z_2)((1-\overline{z}_1\overline{z}_2)\\&\Leftrightarrow|z_1|^2+|z_2|^2=1+|z_1|^2|z_2|^2\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow (1-|z_1|)(1+|z_2|)=0.$
故 $|z_1|=1$ 或 $|z_2|=1$.

6. **证明** 设方程的两根为 α,β,则

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}, & ① \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}. & ② \end{cases}$$

(i) 若 $\alpha\in\mathrm{R}$,则 $\beta\in\mathrm{R}$,因 $a>b>c>0$,故 $\alpha+\beta<0,\alpha\beta>0$.从而知 $\alpha<0$, $\beta<0$,有 $|\alpha|<|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|=\dfrac{b}{a}<1$.

(ii) 若 $\alpha\notin\mathrm{R}$,则 α,β 为一对共轭虚根,有 $|\alpha|^2=\alpha\cdot\overline{\alpha}=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}<1$,故 $|\alpha|<1$.

7. **证明** (i)充分性.因 $|z|=1$,故

$$|u|=\left|\frac{a+bz}{\overline{b}+\overline{a}z}\right|=\left|\frac{a+bz}{\overline{b}+\overline{a}\dfrac{1}{\overline{z}}}\right|=|\overline{z}|\left|\frac{a+bz}{\overline{a+bz}}\right|=|\overline{z}|=1.$$

(ii) 必要性.由 $u=\dfrac{a+bz}{\overline{b}+\overline{a}z}$,可得 $z=\dfrac{a-\overline{\mu b}}{\overline{a}u-b}$,把 $\overline{u}=\dfrac{1}{u}$ 代入,类似(i)即可得 $|z|=1$.

8. **证明** (1) $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$

$$\begin{aligned}&=z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}+z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2,\\&=2+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}\\&=1,\end{aligned}$$

可得
$$z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2+1=0. \qquad ①$$

把 $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1},\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2}$ 代入①即得 $z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0$,所以

$$z_1^3-z_2^3=(z_1-z_2)(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)=0,$$

有 $z_1^3=z_2^3$.

(2) 数列 $\left\{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^n\right\}$ 是以 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 为首项,$\dfrac{z_2}{z_1}$ 为公比的等比数列,且 $\dfrac{z_2}{z_1}\neq 1$(否则与 $|z_1|=|z_1+z_2|$,矛盾).由等比数列求和公式及 $\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^3=1$ [(1)中已证]即可求得和式的值为零.

9. **证明** 不妨设 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.依题设,有 $z_3=-(z_1+z_2)$.于是

$$|z_3|^2 = z_3\overline{z_3} = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1,$$

从而得 $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = -1$. 于是

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = 3,$$

即 $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$, 同理 $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}$. 命题获证.

10. **证明** (1) $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{A}z_1 + A\overline{z_2} = 0$

$$\Leftrightarrow (z_1 + A)(\overline{z_2} + \overline{A}) = |A|^2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + A||z_2 + A| = |A|^2.$$

(2) $$\frac{z_1 + A}{z_2 + A} = \frac{(z_1 + A)(\overline{z_2} + \overline{A})}{(z_2 + A)(\overline{z_2} + \overline{A})} = \frac{|A|^2}{|z_2 + A|^2}$$

$$= \frac{|z_1 + A||z_2 + A|}{|z_2 + A|^2} = \frac{|z_1 + A|}{|z_2 + A|}.$$

11. **解** 因 $|z| = 1$, 故可令 $z = \cos\theta + i\sin\theta (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, 则

$$f(z) = |z^3 - z + 2| = |(\cos\theta + i\sin\theta)^3 - (\cos\theta + i\sin\theta) + 2|$$

$$= \sqrt{6 + 4\cos3\theta - 3\cos2\theta - 4\cos\theta}$$

$$= \sqrt{6 + 4(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 2(\cos^2\theta - 1) - 4\cos\theta}$$

$$= 2\sqrt{(2\cos\theta + 1)^2(\cos\theta - \frac{5}{4}) + \frac{13}{4}}$$

$$\leqslant \sqrt{13}.$$

当 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, 即 $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 时, $f(z)_{\max} = \sqrt{13}$, 即为所求.

12. **证明** 令 $\gamma = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $a_1 = \gamma\cos\theta$, $a_2 = \gamma\sin\theta$. 记题设不等式为①. 若 $\gamma = 0$, ①式显然成立, 否则, ①式等价于

$$2|z_1\cos\theta + z_2\sin\theta|^2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1^2 + z_2^2|. \quad ②$$

又 $$2|z_1\cos\theta + z_2\sin\theta|^2$$

$$= 2(z_1\cos\theta + z_2\cos\theta)(\overline{z_1}\cos\theta + \overline{z_2}\cos\theta)$$

$$= 2|z_1|^2\cos^2\theta + 2|z_2|^2\sin^2\theta + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1})\sin2\theta.$$

故②可变为

$$|z_1|^2(2\cos^2\theta - 1) + |z_2|^2(2\sin^2\theta - 1) + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1})\sin2\theta$$

$$\leqslant |z_1^2 + z_2^2|,$$

即 $$(|z_1|^2 - |z_2|^2)\cos2\theta + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1})\sin2\theta \leqslant |z_1^2 + z_2^2|. \quad ③$$

注意到 $$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = z_1\overline{z_2} + \overline{\overline{z_1}z_1}$$

是实数,根据柯西不等式,③式左边不超过

$$\sqrt{(|z_1|^2-|z_2|^2)^2+(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})^2}$$
$$=\sqrt{|z_1|^4+|z_2|^4+z_2^2\overline{z_1}^2+z_1^2\overline{z_2}^2}$$
$$=\sqrt{z_1^2\cdot\overline{z_1}^2+z_2^2\cdot\overline{z_2}^2+z_1^2\overline{z_2}^2+z_2^2\overline{z_1}^2}$$
$$=\sqrt{(z_1^2+z_2^2)(\overline{z_1}^2+\overline{z_2}^2)}$$
$$=|z_1^2+z_2^2|.$$

故③式成立,命题获证.

练习十六

1. **解**　因 $64=5\times13-1$,故 $2^{12}=(5\times13-1)^2$ 被 13 除余 1.

$$2^{1000}=2^4\times2^{996}=16\times(2^{12})^{83}=16(13k+1)^{83}$$
$$=(13k)\times16[(13k)^{82}+C_{83}^1(13k)^{81}+\cdots+C_{83}^{82}]+16$$
$$=13l+3.$$

这里 $k,l\in N$.故所求余数为 3.

2. **解**　设展开式中第 $r+1$ 项为有理项,则

$$T_{r+1}=C_{100}^r(\sqrt[5]{3})^{100-r}(\sqrt[3]{5})^r=C_{100}^r\cdot3^{20-\frac{r}{5}}\cdot5^{\frac{r}{3}}.$$

当且仅当$\frac{r}{3}$,$\frac{r}{5}$均为整数时,T_{r+1}为有理项,故 $r=15k$, $1\leqslant r+1\leqslant101$,解之可得 $r=0,15,30,\cdots,90$,共 7 项.

3. **解**　因$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$,所以

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k2^k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}2^k$$
$$=\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}2^{k+1}$$
$$=\frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}.$$

4. **解**　展开式中第五项是

$$T_5=C_n^4(\sqrt{x})^{n-4}(-\frac{2}{x^2})^4=2^4C_n^kx^{\frac{n}{2}-10},$$

第三项是

$$T_5 = C_n^2(\sqrt{x})^{n-2}(-\frac{2}{x^2})^2 = 2^2 C_n^2 x^{\frac{n}{2}-5}.$$

依题设,有

$$\frac{2^4 C_n^4}{2^2 C_n^2} = \frac{10}{1},$$

即

$$2^2 \cdot \frac{n!}{4!\ (n-4)!} = 10 \cdot \frac{n!}{2(n-2)!}.$$

化简得 $n^2 - 5n - 24 = 0$,解得 $n = 8$, $n = -3$(舍去). 令 $x = 1$, $(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2})^8 = 1$,即为所求.

5. **解** $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2002} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2002}$

$= (5+2\sqrt{6})^{1001} + (5-2\sqrt{6})^{1001}$

$= [5^{1001} + C_{1001}^1 \cdot 5^{1000} \cdot 2\sqrt{6} + C_{1001}^2 \cdot 5^{999} \cdot (2\sqrt{6})^2 + \cdots + C_{1001}^{1000} \cdot 5 \cdot (2\sqrt{6})^{1000} + (2\sqrt{6})^{1001}] + [5^{1001} - C_{1001}^1 5^{1000} \cdot 2\sqrt{6} + C_{1001}^2 \cdot 5^{999} \cdot (2\sqrt{6})^2 + \cdots + C_{1001}^{1000} \cdot 5 \cdot (2\sqrt{6})^{1000} - (2\sqrt{6})^{1001}]$

$= 2(5^{1001} + C_{1001}^2 \cdot 5^{999} \cdot 24 + \cdots + C_{1001}^{1000} \cdot 5 \cdot 24^{500})$

$= 10(5^{1000} + C_{1001}^2 \cdot 5^{999} \cdot 24 + \cdots + C_{1001}^{1000} \cdot 24^{500})$.

和的个位数字为 0.

6. **证明** 根据二项式定理,有

$$\begin{aligned}
& a_k + (-1)^{k+1}(k+1) \\
&= C_{p-2}^k + (-1)^{k+1}(k+1) \\
&= \frac{(p-2)(p-3)\cdots(p-k-1)}{k!} + (-1)^{k+1}(k+1) \\
&= \frac{(p-2)(p-3)\cdots(p-k-1) + (-1)^{k+1}(k+1)!}{k!}
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
& k![a_k + (-1)^{k+1}(k+1)] \\
&= (p-2)(p-3)\cdots(p-k+1) + (-1)^{k+1}(k+1)! \\
&= mp + (-1)^k \cdot (k+1)! + (-1)^{k+1}(k+1)! \\
&= mp.
\end{aligned}$$

这里 $m \in \mathrm{N}$.在 $1 \leqslant k \leqslant p-2$ 时,$k!$ 不能被 p 整除,因而命题获证.

7. **证明** 因$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n=$
$(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)(C_n^0\cdot x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+C_n^n)$,
比较两边 x^n 的系数.右边为$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$,左边为 $C_{2n}^n=\dfrac{(2n)!}{n!\ n!}$,命题获证.

8. **证明** 令 $x=\dfrac{a+b}{2},y=\dfrac{a-b}{2}$,则 $a=x+y,b=x-y,y\neq0$,故

$$\frac{a^n+b^n}{2}>(\frac{a+b}{2})^n\Leftrightarrow(x+y)^2+(x-y)^2>2x^n.$$

因
$$(x+y)^n+(x-y)^n=2(x^n+C_n^2x^{n-2}y^2+\cdots)>2x^n,$$
故不等式获证.

9. **证明** $n=2$ 时,不等式显然成立.现假设 $2^k<C_{2k}^k<4^k$ 成立.当 $n=k+1$ 时,一方面,

$$C_{2(k+1)}^{k+1}=\frac{[2(k+1)]!}{(k+1)!\ (k+1)!}=\frac{2(2k+1)!}{k!\ k+1)!}=2C_{2k+1}^k$$
$$>2C_{2k}^k>2\cdot2^k=2^{k+1}.$$

另一方面,

$$C_{2(k+1)}^{k+1}=2C_{2k+1}^k=2\cdot\frac{2k+1}{k+1}C_{2k}^k<2\cdot2C_{2k}^k=4C_{2k}^k<4\cdot4^k=4^{k+1}.$$

故 $n=k+1$ 时,不等式成立.综上所述,不等式对一切 $n(\geqslant2)$成立.

另证 构造集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_{2n}\}$. 由 n 个元素组成的 A 的真子集有 C_{2n}^n个,而 A 的所有子集数是 $2^{2n}=4^n$ 个,故有右边不等式.又设集合 $B_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},B_2=\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_{2n}\}$.对于集合 B_1 的一个子集,设共有 r 个元素.若 $r<n$,则从集合 B_2 中任取$(n-r)$个元素;再连同 B_1 子集的全部元素,这种取法实际上是从集合 A 中取出 n 个元素的一种方式.注意到,若 $1\leqslant r\leqslant n$ 则从集合 B_2 中取出$(n-r)$个元素方式不是惟一的.因此,集合 B_1 的全部子集数少于从集合 A 中取出 n 个元素组成的子集数,即 $2^n<C_{2n}^n$.

10. **解** 由 $k^2=k(k-1)+k$,有

$$\sum_{k=1}^n k^2C_n^k=\sum_{k=0}^n[k(k-1)+k]C_n^k$$
$$=\sum_{k=0}^n k(k-1)C_n^k+\sum_{k=0}^n kC_n^k. \qquad ①$$

因 $$k(k-1)C_n^k=k(k-1)\frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!\ [(n-2)-(k-2)]}$$
$$=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}.$$

所以 $$\sum_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k=\sum_{k=2}^{n}n(n-1)C_{n-2}^{k-2}=n(n-1)\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}$$
$$=n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}=n(n-1)\cdot 2^{n-2}. \qquad ②$$

$$\sum_{k=1}^{n}C_n^k=n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}=n\cdot 2^{n-2} \qquad ③$$

将②,③代入①,得

$$\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k=n(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}=n(n+1)\cdot 2^{n-2}.$$

11. **解** (1) 令 $x=\frac{1}{y}$,代入

$$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}, \qquad ①$$

可得 $$(y^2+y+1)^n=a_0y^{2n}+a_1y^{2n-1}+a_2y^{2n}+\cdots+a_{2n}. \qquad ③$$

比较①,②即得 $a_k=a_{2n-k}(1\leqslant k\leqslant n)$.

(2) 记 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 在①中令 $x=\omega$,有

$$a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+\cdots+a_{2n}\omega^{2n}=0. \qquad ③$$

记 $S_1=a_0+a_3+a_6+\cdots$, $S_2=a_1+a_4+a_7+\cdots$, $S_3=a_2+a_5+a_8+\cdots$,根据复数相等条件由③知

$$\begin{cases}S_1-\dfrac{S_2+S_3}{2}=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(S_2-S_3)=0,\end{cases}$$

由此可知 $S_1=S_2=S_3$. 再在①中令 $x=1$,有

$$S_1+S_2+S_3=3^n.$$

于是 $S_1=3^{n-1}$.

12. **证明** 因

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\leqslant\left(\frac{n+a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n=(1+\frac{S}{n})^n$$
$$=1+C_n^1\cdot\frac{S}{n}+C_n^2\cdot(\frac{S}{n})^2+\cdots+C_n^{n-1}(\frac{S}{n})^{n-1}+C_n^n(\frac{S}{n})^n, \qquad ①$$

又 $\quad n!=(n-m)!(n-m+1)\cdots n\leqslant(n-m)!\ n^m \quad (m=1,2,\cdots,n)$,

可得 $$C_n^m\left(\frac{S}{n}\right)^m=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}\cdot\frac{1}{n^m}\cdot S^m\leqslant\frac{S^m}{m!} \quad (m=1,2,\cdots,n). \qquad ②$$

由①,②即得欲证不等式.

13. 证明 $$\sum_{(i,j,k)} n_i n_j n_k\leqslant\frac{1}{6}m(m-1)(m-2), \qquad ①$$

①式右边等于 C_m^3,它是$(1+x)^m$ 展开式中 x^3 的系数,而①式左边的每一项 $n_i\cdot n_j\cdot n_k=C_{n_i}^1\cdot C_{n_j}^1\cdot C_{n_k}^1$又是$(1+x)^{n_i},(1+x)^{n_j},(1+x)^{n_k}$的展开式中 x 的系数.构造函数$(1+x)^{n_1},(1+x)^{n_2},\cdots,(1+x)^{n_s}$,它们的乘积为$(1+x)^m$,即

$$(1+x)^{n_1}\cdot(1+x)^{n_2}\cdot(1+x)^{n_3}\cdots(1+x)^{n_s}=(1+x)^m.$$

比较两边展开后 x^3 的系数,应有

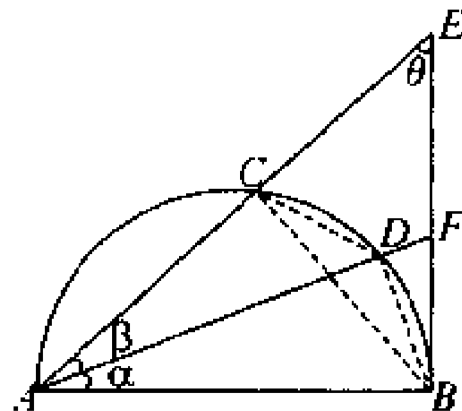
$$\sum_{h_1+h_2+\cdots+h_s=3} C_{n_1}^{h_1}\cdot C_{n_2}^{h_2}\cdots C_{n_s}^{h_s}=C_m^3, \qquad ②$$

其中和号遍及一切满足 $h_1+h_2+\cdots+h_s=3$ 且 $h_i\leqslant n_i(i=1,2,\cdots,s)$的非负整数组$(h_1,h_2,\cdots,h_s)$.现只对②中左边某三个 h_i,h_j,h_k 为 1,其余的为 0 的那一部分求和,那么这一部分的和就是①的左边.由于部分不大于全体,所以①成立.

练习十七

1. 证明 因 $PB\parallel AC$, PD 切$\odot O$ 于 A,故$\angle KPA=\angle CAD=\angle CEA=\angle PEK$,有$\triangle PKE\backsim\triangle AKP$.从而有$\frac{KE}{PK}=\frac{PK}{AK}$,即$PK^2=KE\cdot KA$.又 $KB^2=KE\cdot KA$,所以 $PK=KB$.

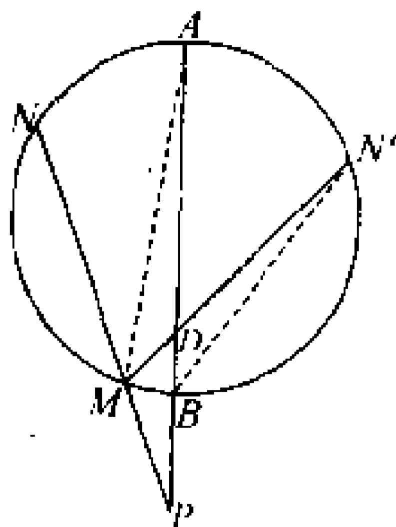
2. 证明 如图.连 BC,设$\angle BAD=\alpha$,$\angle DAC=\beta$,$\angle BKA=\theta$,$AB=2R$,则 $\sin\alpha=\frac{BF}{AF}=\frac{EF}{AF}=\frac{\sin\beta}{\sin\theta}$,即$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\sin\theta$.又因 $AB\perp BE$, $BC\perp AC$,故$\angle ABC=\theta$, $AC=AB\sin\theta$, $CD=2R\sin\beta$, $DB=2R\sin\alpha$.所以$\frac{AC}{AB}=\sin\theta$,$\frac{DC}{DB}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$,有$\frac{AC}{AB}=\frac{DC}{DB}$.



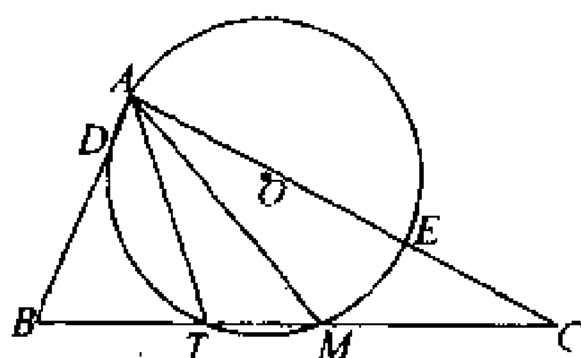
(第 2 题)

3. 证明 如图因 N'是N 关于直径AB 的对称点,故点 N' 也在圆上,且$\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{AN'}$.连 MA,则 MA 为$\triangle PMD$ 中$\angle PMD$ 的外角平分线,故$\frac{PA}{AD}=\frac{PM}{MD}$①.又因

AB 是直径，有 $AM \perp MB$，故 MB 平分 $\angle PMD$. 所以 $\frac{PB}{BD} = \frac{PM}{MD}$②. 由①、②即得 $\frac{PA}{AD} = \frac{PB}{BD}$.



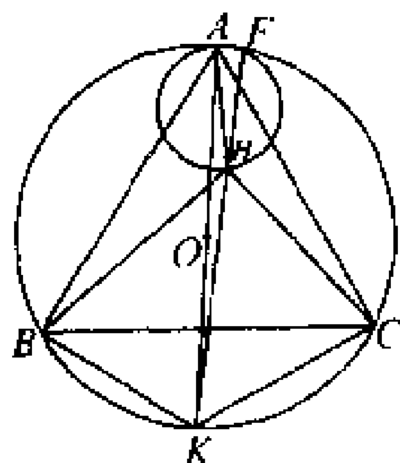
（第 3 题）



（第 4 题）

4. **证明** 如图，因 $BD \cdot BA = BT \cdot BM$，所以 $BD = \frac{BT}{BA} \cdot BM$. 又因 $CE \cdot CA = CM \cdot CT$，所以 $CE = \frac{CT}{CA} \cdot CM$. 而 $BM = CM$，且由 AT 平分 $\angle BAC$ 可知 $\frac{BT}{AB} = \frac{CT}{CA}$，故 $BD = CE$.

5. **证明** 设直线 FH 交 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 于 K（如图），连接 AF、AK. 因 $\angle F = 90°$，故 AK 是 $\odot O$ 的直径. 连 BK、CK、BH、CH，因 BK 及 $CH \perp AB$，故 $BK \parallel CH$. 同理 $BH \parallel CK$. 四边形 $BKCH$ 是平行四边形，故 FH 平分 BC.

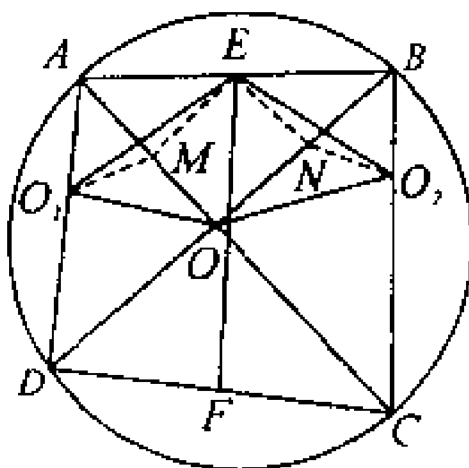


（第 5 题）

6. **证明** 设 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$，且 $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$，则 $AE = p - a$, $CD = p - c$，延长 EH 交 AB 于点 K.

因 $EK \parallel BC$，故 $\frac{AE}{AC} = \frac{EK}{BC} = \frac{AK}{AB}$，又 $BD = BF$, $KH \parallel BD$，所以 $KH = KF$. 于是 $\frac{AK}{b} = \frac{EK - AK}{a - c} = \frac{EH - AF}{a - c}$. 又由 $AE = AF$，可得 $\frac{AE}{b} = \frac{EH}{a + b - c}$，所以 $EH = \frac{AE(a + b - c)}{b} = \frac{2(p - a)(p - c)}{b}$. 又由 $EG \parallel CD$，可得 $EG = \frac{AE \cdot CD}{CA} = \frac{(p - a)(p - c)}{b}$，所以 $EH = 2EG$，即 $EG = GH$.

7. **证明** 设圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 O，O 在 AD、BC 上射影为 O_1、O_2，AB、CD 中点分别为 E、F.



(第 7 题)

取 AO、BO 的中点 M、N，连接 O_1M、O_2N、EM、EN，则有 $O_1M=\frac{1}{2}AO=EN$，$O_2N=\frac{1}{2}BO=EM$. 又

$$\begin{aligned}\angle O_1ME &= \angle O_1MA+\angle AME\\ &=\pi-2\angle O_1AO+\angle AOB\\ &=\pi-2\angle O_2BO+\angle AOB\\ &=\angle BNO_2+\angle ENB\\ &=\angle ENO_2,\end{aligned}$$

故 $\triangle O_1ME\cong\triangle ENO_2$，从而 $O_1E=EO_2$.

同理 $O_1F=FO_2$.

故 O_1、O_2 关于 EF 对称.

8. **证明** 设⊙I 半径为 r，$A=2\alpha$，$B=2\beta$，$C=2\gamma$，$D=2\delta$，则 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$. 于是

$$\begin{aligned}M &= AD\sin A\cdot\sin D+BC\sin B\cdot\sin C\\ &=r(\cot\alpha+\cot\delta)\sin2\alpha\cdot\sin2\delta+r(\cot\beta+\cot\gamma)\sin2\beta\sin2\gamma\\ &=4r(\cos\alpha\cos\delta\sin(\alpha+\delta)+\cos\beta\cos\gamma\sin(\beta+\gamma))\\ &=2r[\cos(\alpha-\delta)+\cos(\alpha+\delta)]\sin(\alpha+\delta)+2r[\cos(\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma)]\sin(\beta+\gamma)\\ &=r[\sin2\alpha+\sin2\delta+\sin2\beta+\sin2\gamma+\sin2(\alpha+\delta)+\sin2(\beta+\gamma)]\\ &=r(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma+\sin2\delta)\\ &=r(\sin A+\sin B+\sin C+\sin D)\end{aligned}$$

同理 $N=r(\sin A+\sin B+\sin C+\sin D)$.

所以 $M=N$.

9. **证明** 设 $OA=R$，⊙C 与⊙Q 的半径分别为 r_1 与 r_2，则 $OC=R-r_1=\sqrt{2}r_1$，有 $r_1=(\sqrt{2}-1)R$，$OQ=R-r_2$，$CQ=r_1+r_2$. 令 $\angle COQ=\alpha$，根据余弦定理，有

$$\cos\alpha=\frac{OC^2+OQ^2-CQ^2}{2\cdot OC\cdot OQ}$$

$$= \frac{2r_1^2 + (R - r_2)^2 - (r_1 + r_2)^2}{2\sqrt{2}r_1(R - r_2)}.$$

$$= \frac{R - (1 + \sqrt{2})r_2}{R - r_2}.$$

①

设$\odot Q$与OA切于点D.在$\mathrm{Rt}\triangle OQD$中，

$$r_2 = QD = OQ\sin\angle AOQ = (R - r_2)\sin(45° - \alpha)$$

$$= \frac{R - r_2}{\sqrt{2}}(\cos\alpha - \sin\alpha).$$ ②

由①,②可得

$$\sin\alpha = \frac{R - (1 + 2\sqrt{2})r_2}{R - r_2}.$$

于是,有

$$OQ + PQ = OQ + OQ\sin\alpha = OQ(1 + \sin\alpha)$$

$$= (R - r_2)\cdot\left[1 + \frac{R - (1 + 2\sqrt{2})r_2}{R - r_2}\right]$$

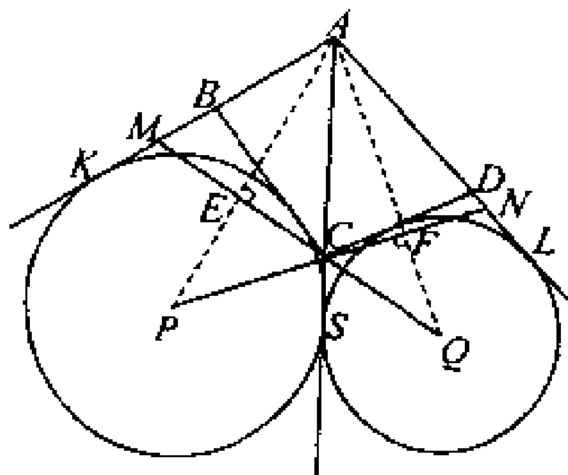
$$= 2[R - (1 + \sqrt{2})r_2],$$

$$2OP = 2OQ\cos\alpha = 2(R - r_2)\cdot\frac{(1 + R - \sqrt{2})r_2}{R - r_2}$$

$$= 2[R - (1 + \sqrt{2})r_2].$$

所以,$OQ + QP = 2OP$.命题获证.

10. **证明** 首先证明$\odot P$、$\odot Q$与直线AC相切于同一点S.若$\odot P$与AC相切于点S_1,$\odot Q$与AC相切于点S_2,则$AS_1 = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$,$AS_2 = \frac{1}{2}(AD + CD + AC)$.因四边形$ABCD$是平行四边形,故$AS_1 = AS_2$,即$S_1$与$S_2$重合于同一点$S$.



(第10题)

如图,连结AP、AQ,分别交CM、CN于E、F,因$\odot P$、$\odot Q$分别是$\triangle ABC$、$\triangle ACD$的旁切圆,所以

$$\angle ACE = \angle SCQ = \frac{1}{2}\angle SCD$$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ACD)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle CAB=90^\circ-\angle CAE,$$

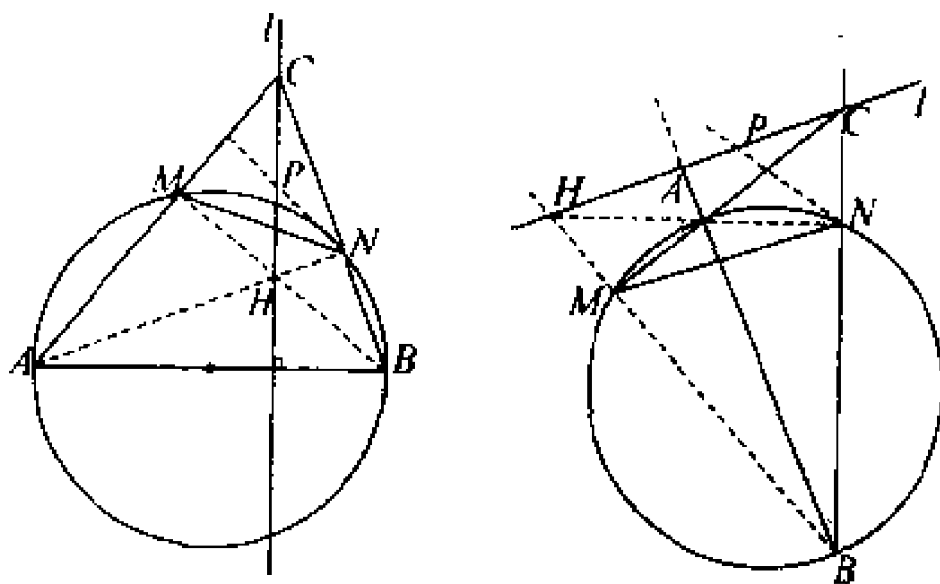
即 $AE\perp CM$.同理 $AF\perp CN$.

从而$\triangle ACM$和$\triangle ACN$都是等腰三角形,$AM=AC=AN$.又 $AK=AS=AL$,故 $AK-AM=AL-AN$,即 $KM=LN$.

11. **证明** 如图,连 AN、BM,则 $AN\perp BC$,$BM\perp AC$,即 AN,BM 是$\triangle ABC$的两条高.又 $l\perp AB$,$C\in l$,故 AN、BM、l 相交于一点,设为 H.过 N 作圆的切线交 CH 于 P,则

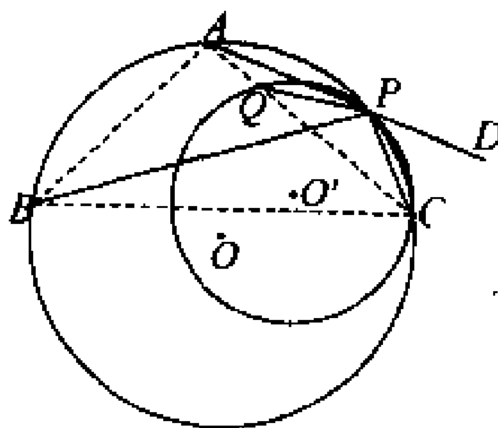
$$\begin{aligned}\angle CNP&=90^\circ-\angle PNA\\&=90^\circ-\angle ABN\\&=\angle HCB.\end{aligned}$$

又 $HN\perp CN$,故 P 为 CH 中点.同理,过 M 的圆的切线与 CH 也交于 P 点.因此 l 过点 P.而点 P 是过 M、N 的圆的两切线交点,为一定点.命题获证.



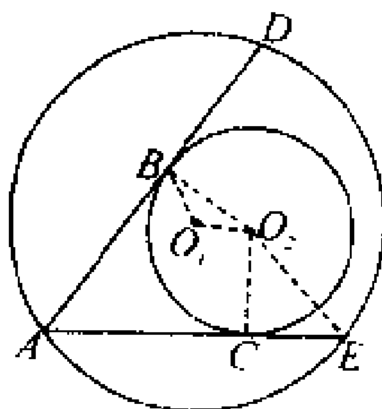
(第11题)

12. **证明** 连 BC、AB、AC,则 $AB=AC$;过 P、C 两点作圆 O',使 AP 切圆 O' 于点 P,且与 AC 交于点 Q,则 $AP^2=AQ\cdot AC$,延长 AP 到 D,则$\angle PQC=\angle DPC=\angle ABC=\angle ACB=\angle APB$.因$\angle ACP=\angle ABP$,所以$\triangle CPQ\backsim\triangle BAP$,有$\frac{CP}{AB}=\frac{CQ}{BP}$,即$\frac{CP}{AC}=\frac{CQ}{BP}$,$BP\cdot CP=AC\cdot CQ$.于是 $AP^2+BP\cdot CP=AC\cdot AQ+AC\cdot CQ=AC(AQ+CQ)=AC^2$.



(第12题)

13. **证明** 如图，设 $BD=a$．$CE=b$．根据相交弦定理，有



（第 13 题）

$$(R+BO_1)(R-BO_1)=AB\cdot BD,$$

即 $$BO_1^2=R^2-a\cdot AB. \quad ①$$

因 $\angle O_1BA+\angle O_1BO_2=\frac{\pi}{2}$，所以

$$\cos^2\angle O_1BA+\cos^2\angle O_1BO_2=1, \quad ②$$

根据余弦定理及②得

$$\frac{(AB^2+BO_1^2-O_1A^2)^2}{4AB^2\cdot BO_1^2}+\frac{(BO_2^2+BO_1^2-O_1O_2^2)^2}{4BO_2^2\cdot BO_1^2}=1. \quad ③$$

因 $R\geqslant\sqrt{2}r$，故 $O_1O_2=\sqrt{R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2}}$存在．由①，③可得

$$r^2(AB-a)^2+(r\sqrt{4R^2+r^2}-AB\cdot a)^2=4(R^2-AB\cdot a)r^2,$$

即 $$(r^2+AB^2)a^2-2AB\cdot r(\sqrt{4R^2+r^2}-r)a+r^2(AB^2+r^2)=0.$$

故 a 是方程

$$(r^2+AB^2)x^2-2AB\cdot r(\sqrt{4R^2+r^2}-r)x+r^2(AB^2+r^2)=0 \quad ④$$

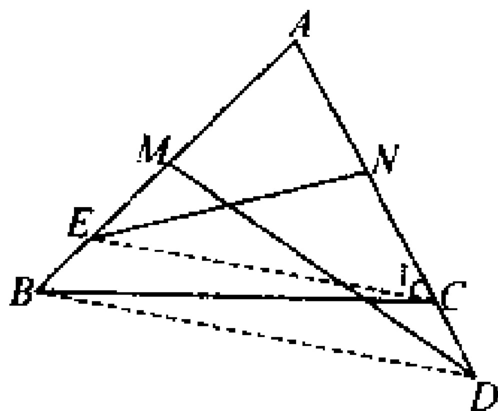
的根．同理 b 也是方程④的根．根据韦达定理有

$$ab=\frac{r^2(AB^2+r^2)}{r^2+AB^2}=r^2,$$

即 $BD\cdot CE=r^2$．命题获证．

练习十八

1. **证明** 设 AB、AC 的中点分别为 M、N，连接 EC、DB．因 MD 是 AB 的中垂线，故 $\angle A=\angle ABD$．又因 NE 是 AC 的中垂线，所以 $\angle 1=\angle A$．于是 $\angle 1=\angle ABD$，有 B、C、D、E 四点共圆．

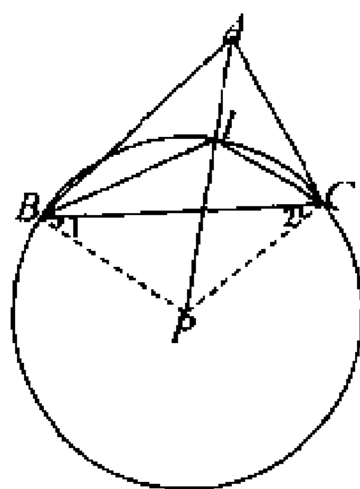


（第 1 题图）

2. **证明** （1）如图，连 PB、PC、PI，则 $PB=PI=PC$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle BIC=\angle BIP+\angle PIC=\angle 1+\frac{1}{2}\angle ABC+\angle 2+\frac{1}{2}\angle ACB=2\angle 1+\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB$，所以 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC$．进而，有 $\angle PIB$

$=\angle PBI=\angle 1+\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)$,所以,$A$、$I$、$P$ 三点共线.

(2) 因$\angle BPC=180^\circ-2\angle 1=180^\circ-\angle BAC$,故 A、B、P、C 四点共圆.

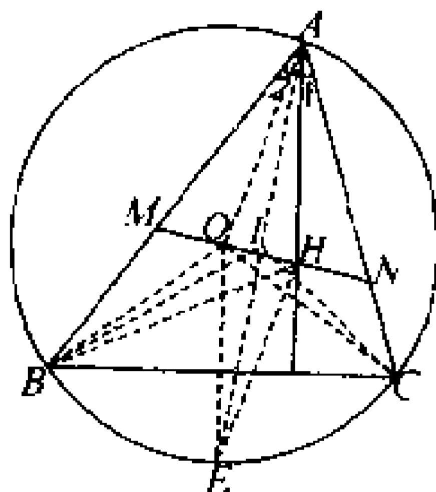


(第 2 题)

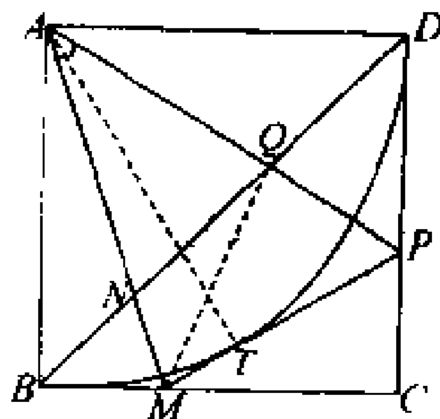
3. **证明** (1) 如图,连 OB、OC、IB、IC、HB、HC.因$\angle BAC=60^\circ$,所以$\angle BOC=120^\circ$.$\angle BIC=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.因 $\angle 1=\angle HBC$, $\angle 2=\angle HCB$.故$\angle BHC=180^\circ-(\angle HBC+\angle HCB)=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)=120^\circ$,所以 B、C、H、I、O 五点共圆.

(2) $AH=2R\cos 60^\circ=R=OA$.

(3) 连 AI,并延长交圆 O 于点 E,则点 E 为$\overset{\frown}{BC}$中点,又连 OE,则 $OE\perp BC$. $AH\underline{\underline{//}}OE$, $AO=AH$,四边形 $AOEH$ 是菱形,所以 $AI\perp MN$,故 $AM=AN$,又$\angle MAN=60^\circ$,故$\triangle AMN$ 为正三角形.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. **证明** 如图,设 T 为切点,连接 AT、MQ,由切线定理知 $BM=MT$, $TP=PD$,从而$\text{Rt}\triangle ABM\cong\text{Rt}ATM$, $\text{Rt}\triangle ATP\cong\text{Rt}ADP$,于是$\angle MAT=\angle MAB$, $\angle PAT=\angle PAD$,可得$\angle MAP=\angle MAT+\angle PAT=\frac{1}{2}(\angle BAT+\angle DAT)=45^\circ$,又$\angle QBM=45^\circ$,所以 A、B、M、Q 四点共圆,从而$\angle AQM=\angle ABM=90^\circ=\angle MCP$,故 P、Q、M、C 四点共圆.同理 P、N、M、C 四点共圆.于是 P、Q、N、M、C 五点共圆.

5. **证明** 下面证明更强的结论:三角形 ABC 与三角形$A'B'C'$有相同的外接圆.只须证明 A、H、C、A'、B'、C'六点共圆,而这又只须证明 A、B、C、A'四点

共圆.

如图，连 IA、IB、IC、IA'、$A'B$、$A'C$，因

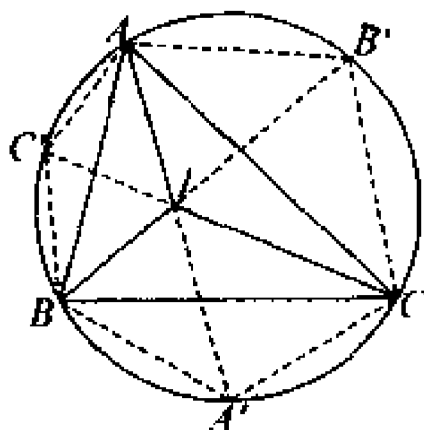
$$\angle BIC=\angle A+\frac{1}{2}(\angle B+\angle C),$$

又因 A' 是 $\triangle IBC$ 的外心，则 $BA'=IA'=CA'$. 所以，

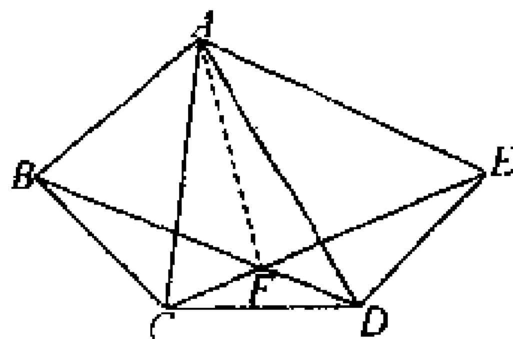
$$\angle IBA'+\angle ICA'=\angle BIA'+\angle CIA'=\angle BIC,$$

$$\begin{aligned}\angle BA'C&=360^\circ-\angle BIC-(\angle IBA'+\angle ICA')\\&=360^\circ-2\angle BIC\\&=360^\circ-2\left[\angle A+\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)\right]\\&=180^\circ-\angle A.\end{aligned}$$

即 $\angle A+\angle BA'C=180^\circ$，所以 A、B、C、A' 共圆. 由对称性 A、B、C、A'、B'、C' 共圆.



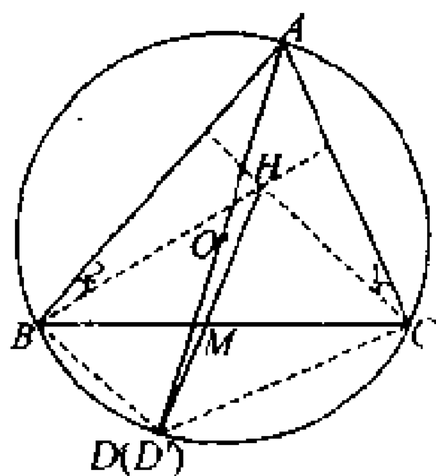
（第 5 题）



（第 6 题）

6. **证明** 设 BD、CE 交于 F，连 AF（如图），因 $\angle ADF=\angle AEF$，故 A、F、D、E 四点共圆，于是 $\angle DAE=\angle DFE=\angle BFC$. 又 $\angle AFE=\angle ADE=\angle ABC$，知 A、B、C、F 四点共圆，所以 $\angle BAC=\angle BFC=\angle DAE$.

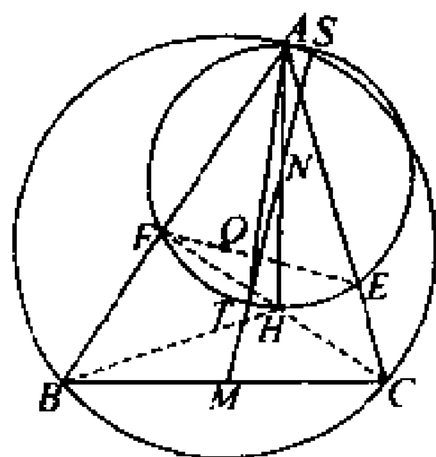
7. **证明** (1) 在 HM 的延长线上取一点 D'，使 $MD'=MH$（如图），连 BD'、$D'C$、CH、HB，则四边形 $BD'CH$ 为平行四边形. 因 $CH\perp AB$，所以 $BD'\perp AB$. 同理 $C'D\perp AC$，所以 A、B、D'、C 四点共圆. 因 HM 的延长线和过点 A、B、C 的圆的交点只有一个，故点 D' 与 D 重合，有 $HM=MD$.



（第 7 题）

(2) 因四边形 $BHCD$ 为平行四边形，$BH\perp AC$，所以 $DC\perp AC$，AD 为直径.

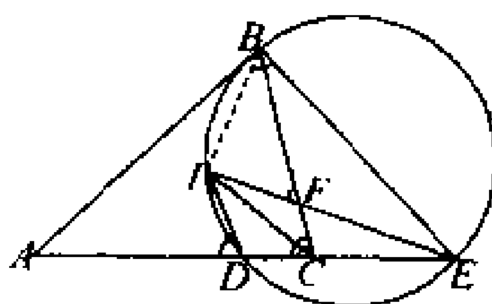
8. **证明** 如图，设 AH 为直径的圆交 AB、AC 于点 F、E，则 $FH\perp AB$. 因 H 为$\triangle ABC$ 的垂心，所以 C、H、F 三点共线. 同理，B、H、E 三点共线，于是 B、F、E、C 四点共圆，且以 M 为圆心，EF 为圆 M 和圆 N 的公共弦，故 $MN\perp EF$，$\overset{\frown}{FT}=\overset{\frown}{ET}$，圆 N 中 AT 平分$\angle BAC$. 又因 $AT\perp AS$，所以 AS 平分$\angle BAC$ 的外角.



(第 8 题)

9. **证明** 如图，连结 BI 和 BE，则四边形 $BIDE$ 内接于圆，有$\angle IDA=\angle IBE$.

设 BC 与 IE 交于 F，则$\angle IFB=\angle BEF+\angle EBF$. 因 AB 是$\odot BIDE$ 的切线，所以$\angle ABI=\angle BEI$. 又$\angle ABI=\angle CBI$，所以$\angle BEI=\angle CBI$. 因而$\angle IDA=\angle IBE=\angle CBI+\angle CBE=\angle BEI+\angle CBE=\angle IFB$. 但 I 是$\triangle ABC$ 的内心，$\angle ICD=\angle ICF$，故$\angle DIC=\angle FIC$，即 IC 平分$\angle DIE$.

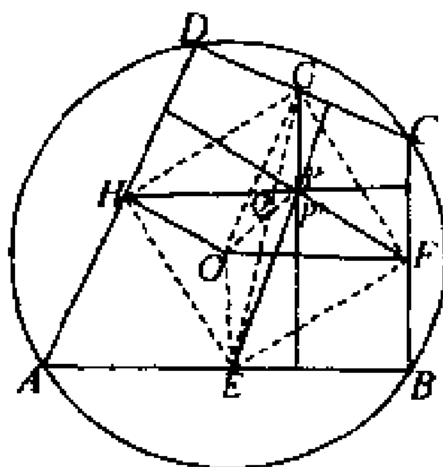


(第 9 题)

10. **证明** 若四边形是矩形，则四条垂线两两重合后交于一点，命题成立.

若圆内接四边形是等腰梯形，则过互相平行的两边中点所作的对边的垂线重合，由对称性可知过另两边中点所作对边的垂线交于此直线上同一点.

若圆内接四边形对边均不平行，如图，内接于圆 O 的四边形 $ABCD$，各边的中点为 E、F、G、H. 设过 E、G 所作对边的垂线交于 P，过 F、H 所作对边的垂线交于 P'. 连 OE、OG、$OE\perp AB$、$OG\perp DC$，四边形 $OEPG$ 是平行四边形，对角线 EG、OP 交于 Q 且被 Q 点所平分. 又四边形 $EFGH$ 也是平行四边形，Q 点也是 HF 的中点. 同理可知四边形 $HOFP'$ 也是平行四边形，HF 的中点也是对角线 OP' 的中点，所以 P 与 P' 重合，所以，圆内接四边形中，过四边中点引对边的四条垂线交于一点.



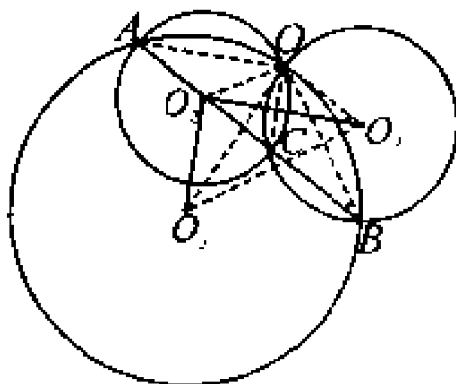
(第 10 题)

11. **证明** 如图，设 O 是$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 的公共点，A、B、C 分别是$\odot O_2$ 与$\odot O_3$，$\odot O_1$ 与$\odot O_3$，$\odot O$ 与$\odot O_2$ 的交点.

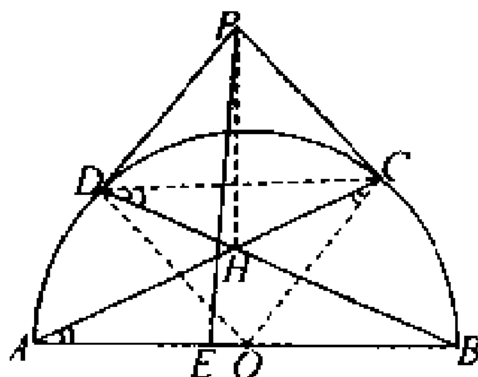
因 OA 是$\odot O_2$ 与$\odot O_3$ 的公共弦，OB 是$\odot O_1$ 与$\odot O_3$ 的公共弦，OC 是$\odot O_1$

与$\odot O_2$的公共弦，所以 $OA \perp O_2O_3$，$OB \perp O_1O_3$，即 O_2O_3，O_1O_3 分别是 OA、OB 的中垂线.

注意到 A、B、C 三点共线，于是在$\odot O_1$、$\odot O_3$ 中，$\angle OO_1O_2 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{OC} = \angle OBC = \angle OBA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{OA} = \angle OO_3O_2$，故 O、O_1、O_2、O_3 四点共圆.



（第 11 题）

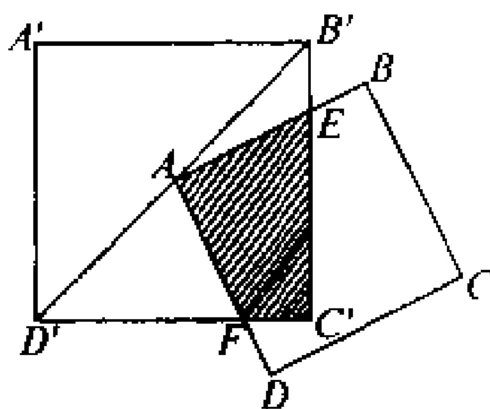


（第 12 题）

12. **证明** 设 AC、BD 交于 H，连结 OC、OD、CD（如图）. 因$\angle ACO = \angle CAO = \angle CDH$，所以 OC 是$\odot DHC$ 的切线. 又因 $PC \perp CO$，则$\odot DHC$ 的圆心在直线 PC 上，同理，$\odot DHC$ 圆心在直线 PD 上，故 P 为$\odot DHC$ 的圆心. 所以 $PH = PC$. 故$\angle PHC = \angle PCH$. 又因$\angle CAB = \angle ACO$，$\angle ACO + \angle PCH = 90°$. 所以$\angle CAH + \angle PHC = 90°$. 故 $PH \perp AB$. 故 P、H、E 三点共线. 所以 AC、BC、PE 三线共点.

练习十九

1. **解** 连 AC'. 因 $AB' = AC'$，$\angle AB'E = \angle AC'F$，$\angle B'AE = \angle C'AF = 90° - \angle EAC'$，故 $\triangle B'AE \cong \triangle C'AF$，$S_{四边形AFC'E} = S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{4}S_{正方形A'B'C'D'} = \frac{1}{4}$，即两正方形共同部分的面积为 $\frac{1}{4}$.



（第 1 题）

2. **解** 因 $BH \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} DF$，$AG \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} CE$，故四边形 $BFDH$ 与 $AECG$ 均为平行四边形，$\triangle ABQ \cong \triangle CDN$，$\triangle BCM \cong \triangle DAP$，$\triangle APH \cong \triangle CMF$，$\triangle DGN \cong \triangle BEG$. 因 $AG = \frac{2}{3}AD$，BH

$=\frac{2}{3}AB$,

所以 $S_{\square AECG}=\frac{2}{3}S_{\square ABCD}=S_{\square BFDH}$,

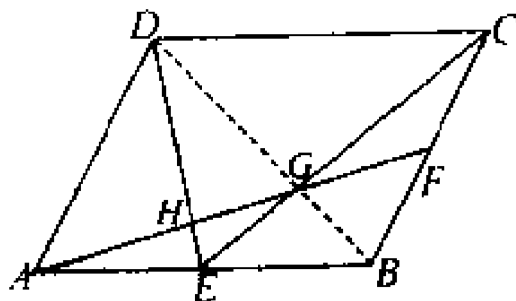
$$S_{四边形APNG}=S_{四边形CEQM}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}S_{\square ABCD}-S_{四边形PQMN}\right)$$
$$=S_{四边形DFMN}.$$

因 $AH=\frac{1}{3}AB$, $BE=\frac{1}{3}BC$, 使 $S_{\triangle ABQ}=9S_{\triangle APH}=9$,

$$S_{四边形AECG}=S_{\square ABCD}-2S_{\triangle ABE}=60-20=40.$$

故

$$S_{四边形PQMN}=S_{\square AECG}-2S_{四边形CEQM}=40-2\times 8=24.$$



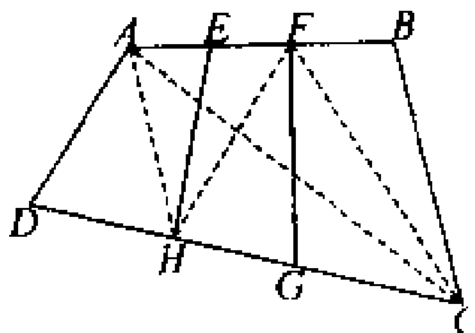
(第 3 题)

3. **解** 连结 BG、DG(如图). 因 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=S_{\triangle FBC}$, 所以 $S_{\triangle AEG}=S_{\triangle CFG}$. 进而 $S_{\triangle BEG}=S_{\triangle AEG}=S_{\triangle CFG}=S_{\triangle BFG}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABF}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{12}S_{\square ABCD}=\frac{1}{12}$. 又 $S_{\triangle ADG}+S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$, 所以 $S_{\triangle ADG}=\frac{1}{3}$. 根据共边定理,

$$\frac{HE}{DH}=\frac{S_{\triangle AEG}}{S_{\triangle ADG}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}.$$

进而 $$S_{\triangle AEH}=\frac{1}{5}S_{\triangle DAE}=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{4}S_{\square ABCD}\right)=\frac{1}{20},$$

可得 $$S_{\triangle EGH}=S_{\triangle AEG}-S_{\triangle AEH}$$
$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30}.$$



(第 4 题)

4. **解** 如图,连 AH、HF、FC、AC. 因 $DH=HG=GC$, 故 $S_{\triangle AHC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ADC}$, 同理 $S_{\triangle AFC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$, 所以 $S_{AHCF}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABCD}$.

因 $AE=EF$, 所以 $S_{\triangle EFH}=S_{\triangle EAH}$. 同理, $S_{\triangle GHF}=S_{\triangle GCF}$. 所以 $S_{\triangle EFGH}=\frac{1}{2}$

$S_{AHCF}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

5. **解** 如图,设 $BC=a$, $AC=b$, T_1, T_2, N_1, N_2, N_3 表示图中各三角形的面积,则

$$\frac{N_1}{T_1}=\frac{N_2}{T_2}=\frac{440}{441},$$

可得

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=N_1+N_2+N_3+440\\&=\frac{440}{441}(T_1+T_2+441)+N_3\\&=\frac{440}{441}S_{\triangle ABC}+N_3.\end{aligned}$$

故 $N_3=\frac{1}{441}S_{\triangle ABC}$. 又

$$\left(\frac{\sqrt{440}}{AB}\right)^2=\frac{N_3}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{441},$$

故 $AB=21\sqrt{440}$.

设 N_3 对应斜边上的高为 h_1, $\triangle ABC$ 的斜边上高为 h,则

$$\left(\frac{h_1}{h}\right)^2=\frac{N_3}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{441}, \quad ①$$

$$h=h_1+\sqrt{440}. \quad ②$$

由①,②解得 $h=\frac{21}{20}\sqrt{440}$. 于是

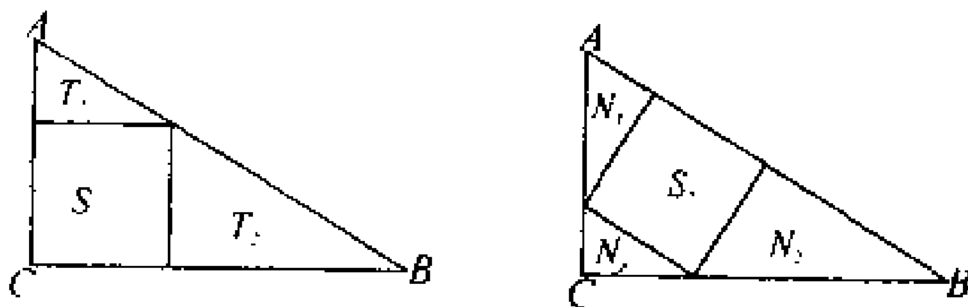
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}ab,$$

即得 $\qquad ab=21^2\times 22. \quad ③$

又 $\qquad AB^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=21^2\times 440, \quad ④$

③代入④得

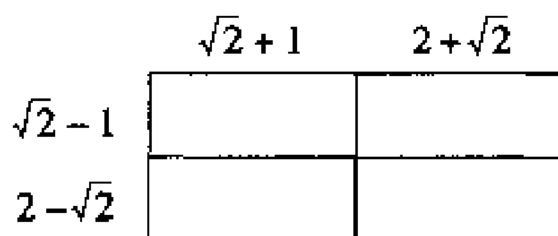
$$a+b=462.$$



(第5题)

即为所求.

6. **解** 设大矩形边长为 1 的边被分成长为 a 和 $1-a$ 的两段($0<a\leqslant\frac{1}{2}$),另一边被分成长为 c 和 d 的两段($c<d$),则



(第 6 题)

$$ac\geqslant 1,$$
$$(1-a)d\geqslant 2,$$

故
$$c+d\geqslant\frac{1}{a}+\frac{2}{1-a}=\frac{1+a}{a(1-a)}.$$

令 $t=\frac{1+a}{a(1-a)}$,则

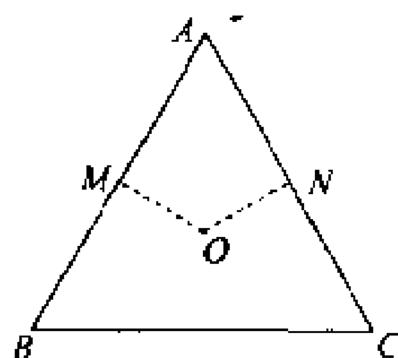
$$ta^2-(1-t)a+1=0.$$

注意到 $t>1$,有

$$\Delta=(1-t)^2-4t=t^2-6t+1\geqslant 0.$$

解得 $t\geqslant 3+2\sqrt{2}$.故 $c+d\geqslant 3+3\sqrt{2}$.另一方面,等号可取到,如图所示.故 $c+d$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$,即为所求.

7. **解** 如图.设 O 为$\triangle ABC$ 的外心,$OA=R$,OM、ON 分别为 AB、BC 的中垂线,垂足 M、N,则区域即为四边形 $BMON$.因 $S_{\triangle BMO}=S_{\triangle AMO}$,$S_{\triangle BNO}=S_{\triangle CNO}$,且 $S=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.故



(第 7 题)

$$S_{\triangle AOC}=S_{\triangle ABC}-2S=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}. \quad ①$$

因$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 成等差数列,故$\angle B=\frac{\pi}{3}$.于是$\angle AOC=\frac{2\pi}{3}$,由①有

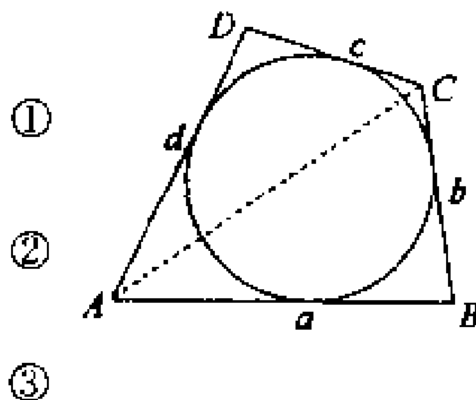
$$\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3},$$

即
$$R^2=\frac{1}{3}ac=\frac{1}{3}\cdot 4R^2\sin A\cdot\sin C.$$

于是
$$\sin A\cdot\sin C=\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow\ \cos(A-C)-\cos(A+C)=\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow\ \cos(A-C)=1.$$

故 $A=C$.所以$\triangle ABC$为正三角形.

8. **证明** 如图,连 AC,



(第8题)

$$a+c=b+d, \quad ①$$

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B$$
$$=c^2+d^2-2cb\cos D, \quad ②$$

由①可得

$$(a-b)^2=(c-d)^2. \quad ③$$

由②,③可得

$$ab(1-\cos B)=cd(1-\cos D). \quad ④$$

因 $$S_{ABCD}=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D=\sqrt{abcd}, \quad ⑤$$

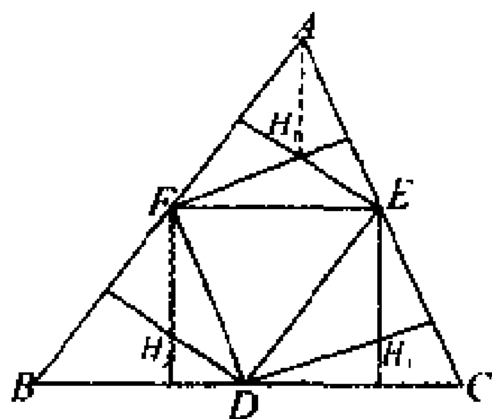
由④,⑤可知

$$4abcd=(ab\sin B+cd\sin D)^2$$
$$=a^2b^2(1-\cos^2B)+2abcd\sin B\sin D+c^2d^2(1-\cos^2D)$$
$$=a^2b^2(1+\cos B)(1-\cos B)+2abcd\sin B\cdot\sin D$$
$$+c^2d^2(1+\cos D)(1-\cos D)$$
$$=abcd(1+\cos B)(1-\cos D)+2abcd\sin B\sin D+abcd(1-\cos B)(1+\cos D),$$

即得 $(1+\cos B)(1-\cos D)+2\sin B\sin D+(1-\cos B)(1+\cos D)=4$,

故 $\cos(B+D)=-1$. 又 $0<B+D<2\pi$,所以$\angle B+\angle D=\pi$,即 A、B、C、D 四点共圆.

9. **证明** 如图,设 D、E、F 分别为锐角$\triangle ABC$三边 BC、CA、AB 的中点. H_1、H_2、H_3 为$\triangle AFE$、$\triangle BDF$、$\triangle CED$ 的垂心. 易知$\triangle AFE\cong\triangle FBD\cong\triangle EDC$,连 AH_1,有$\triangle AH_1E\cong\triangle FH_2D$,$\triangle AH_1F\cong\triangle EH_3D$,故



(第9题)

$$S_{H_1FH_2DH_3E}=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

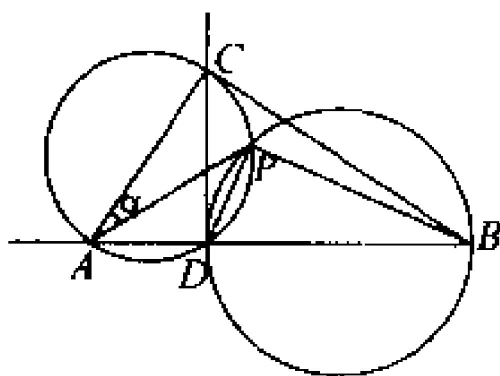
命题获证.

10. **证明** 设$\angle PBD=\angle CDP=\angle CAP=\alpha$. 设 $AC=2r_1$,$BD=2r_2$,则 $PA=2r_1\cos\alpha$,$PC=2r_1\sin\alpha$,$PB=2r_2\cos\alpha$,$PD=2r_2\sin\alpha$. 又$\angle CPB+\angle APD=180°$,有$\sin\angle CPB=\sin\angle APD$. 于是

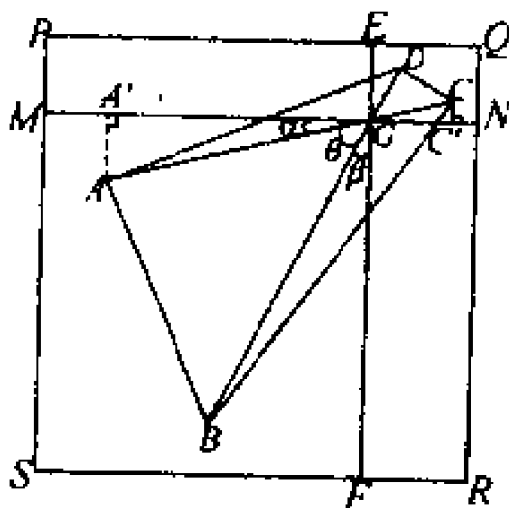
$$S_{\triangle PCB}=\frac{1}{2}PC\cdot PB\sin\angle CPB=2r_1r_2\sin\alpha\cos\alpha\sin\angle CPB$$
$$=r_1r_2\sin2\alpha\sin\angle CPB.$$

$$S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}PA\cdot PD\sin\angle APD$$
$$=2r_1r_2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\angle APD$$
$$=r_1r_2\sin2\alpha\sin\angle CPB.$$

所以　$S_{\triangle PCB}=S_{\triangle PAD}$.



(第 10 题)



(第 11 题)

11. **证明**　如图，设$\angle AGM=\alpha$，$\angle AGB=\theta$，$\angle BGF=\beta$. 则 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta$，设 A'，C' 为 A，C 在 MN 上的射影，则 $AC=\frac{A'C'}{\cos\alpha}\leqslant\frac{MN}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$. 同理，$BD\leqslant\frac{1}{\cos\beta}$. 于是，有

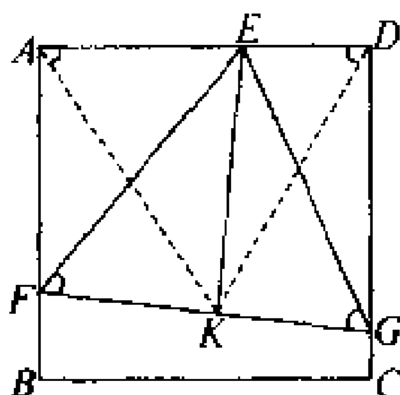
$$S_{ABCD}\leqslant\frac{\sin\theta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

因　$\sin\theta=\sin(90^\circ-\alpha-\beta)$
$$=\cos(\alpha+\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\leqslant\cos\alpha\cos\beta,$$

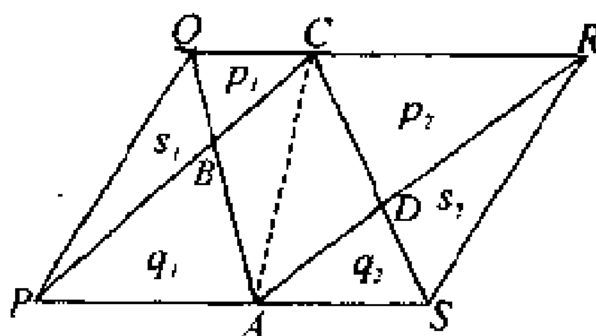
（当且仅当 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$ 时取等号），故 $S_{ABCD}\leqslant\frac{1}{2}$. 当且仅当 M、A 重合，N、C 重合，且 B、D 分别在 FS、EQ 上，或 F、B 重合，E、D 重合，且 A、C 分别在 MS、NQ 上时取等号. 故 S_{ABCD}的最大值是$\frac{1}{2}$.

12. **解**　设$\triangle EFG$是边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的任意一个内接正三角形.

显见△EFG的三个顶点位于正方形的三条边上.不妨设顶点F、G在正方形$ABCD$的一组对边上(如图).作高EK,则E、K、G、D四点共圆.连KD,有$\angle KDE=\angle EGK=60°$.连$KA$,同理$\angle KAE=\angle KFE=60°$.故△$AKD$是正三角形.这说明△$EFG$的边$FG$的中点$K$是定点.当$FK\perp AB$时,$FK$取最小值,此时△$EFG$边长为1,最小,其面积也取最小值,等于$\frac{\sqrt{3}}{4}$.当$KF$过点$B$(即$F$、$B$重合),此时△$EFG$边长为$\sqrt{6}-\sqrt{2}$最大,其面积为$2\sqrt{3}-3$,也取最大值.



(第12题)



(第13题)

13. **解** 如图,连AC,设$S_{\triangle QBP}=S_1$,$S_{\triangle RSD}=S_2$,$S_{\triangle BCQ}=p_1$,$S_{\triangle BPA}=q_1$,$S_{\triangle DRS}=p_2$,$S_{\triangle DAS}=q_2$,则$S_{\triangle ADC}=S_2$,$S_{\triangle BCA}=S_1$.由

$$\frac{P_1}{S_1}=\frac{CB}{BP}=\frac{S_1}{q_1},$$

可得$S_1=\sqrt{p_1q_1}$.于是$S_1\leqslant\frac{p_1+q_1}{2}$,进而有

$$2S_1\leqslant\frac{p_1+q_1+2S_1}{2}=\frac{S_{QCAP}}{2}.$$

当且仅当$p_1=q_1$时取等号.同理$2S_2\leqslant\frac{S_{RSAC}}{2}$,当且仅当$p_2=q_2$时取等号.故

$$S_1+S_2\leqslant\frac{S_{QCAP}+S_{RSAC}}{4}=\frac{S_{PQRS}}{4}=\frac{1}{4}.$$

当且仅当$p_1=q_1$,$p_2=q_2$时取等号,即$AC/\!/PQ$时S_{ABCD}有最大面积$\frac{1}{4}$.

练习二十

1. **解** 根据梅涅劳斯定理,直线AGD,AHE截△BCM,有

$$\frac{BG}{GM}\cdot\frac{MA}{AC}\cdot\frac{CD}{OM}=\frac{BG}{GM}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1,$$

及 $$\frac{BH}{HM}\cdot\frac{MA}{AC}\cdot\frac{CE}{EB}=\frac{BH}{HM}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1.$$
从而得到　$BG=GM$, $BH=4HM$. 所以
$$GB:GH:HM=5:3:2.$$

2. **解**　依题设,可得$\frac{AF}{FB}=\frac{4}{3}$, $\frac{DO}{OA}=\frac{1}{2}$. 根据梅涅劳斯定理,直线 FDC 截 $\triangle ABD$,有
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DO}{OA}=\frac{4}{3}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{1}{2}=1.$$
所以　$\frac{BC}{CD}=\frac{3}{2}$,进而有$\frac{BC}{BD}=3$,于是

证明　$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ABD}=3(40+30+35)=315$.

3. **解**　由梅涅劳斯定理有$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1$. 又由于 M'、N'、L' 分别与 M、N、L 关于三边中点对称,所以 $AN'=BN$, $BN'=AN$, $BL'=CL$, $CL'=BL$, $AM'=CM$, $CM'=AM$,代入上式得$\frac{CL'}{L'B}\cdot\frac{BN'}{N'A}\cdot\frac{AM'}{M'C}=1$,所以 L'、M'、N' 三点共线.

4. **解**　因直线 $FA'B'$ 截$\triangle SAB$,由梅涅劳斯定理,有$\frac{SA'}{A'A}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BB'}{B'S}=1$. 同理,直线 $EC'A'$ 截$\triangle SAC$,有$\frac{AA'}{A'S}\cdot\frac{SC'}{C'C}\cdot\frac{CE}{EA}=1$. 直线 $DC'B'$ 截$\triangle SBC$,有$\frac{SB'}{B'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CC'}{C'S}=1$. 三式相乘得$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$. 根据梅涅劳斯定理知 D、E、F 三点共线.

5. **证明**　设 P、R、Q 分别为 EB、BC、CE 中点,因为 L、Q、R 分别是 CA、CE、CB 的中点,所以它们在同一直线上,且有$\frac{QL}{LR}=\frac{EA}{AB}$. 同理,$M$、$R$、$P$ 在同一直线上,且$\frac{RM}{MP}=\frac{CD}{DE}$. N、P、Q 三点在同一直线上,且$\frac{PN}{NQ}=\frac{BF}{FC}$. 三式相乘得$\frac{QL}{LR}\cdot\frac{RM}{MP}\cdot\frac{PN}{NQ}=\frac{EA}{AB}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{BF}{FC}$. 但因直线 ADF 切割$\triangle EBC$,根据梅涅劳斯定理,可知 L、M、N 三点共线.

6. **证明**　因 AD、BE、CF 三线共点,根据塞瓦定理　$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$,但 D、E、F 和 D'、E'、F' 共圆. 所以 $BD'\cdot BD=BF'\cdot BF$, $CE'\cdot CE=CD'\cdot CD$, $AF'\cdot AF=AE'\cdot AE$,三式相乘得
$$BD'\cdot CE'\cdot AF'\cdot BD\cdot CE\cdot AF=BF'\cdot BF\cdot CD'\cdot CD\cdot AF'\cdot AF,$$
即 $$\frac{BD'\cdot CE'\cdot AF'\cdot BD\cdot CE\cdot AF}{D'C\cdot E'A\cdot F'B\cdot DC\cdot EA\cdot FB}=1.$$

因$\frac{BD'}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$,所以$\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1$.根据塞瓦定理得 AD'、BE'、CF' 共点.

7. **证明** B' 与 O、C' 与 O 分别关于 AC、AB 对称,故 $AB'=AO=AC'$,又 $CA=BA$,所以$\angle BAB'+\angle CAC'=(\angle BAO+2\angle CAO)+(\angle CAO+2\angle BAO)=3(\angle BAO+\angle CAO)=180°$,$S_{\triangle BAB'}=S_{\triangle CAC'}$,同理 $S_{\triangle ABA'}=S_{\triangle CBC}$,$S_{\triangle ACA'}=S_{\triangle BCB'}$.故 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle ACA'}}\cdot\frac{S_{\triangle BCB'}}{S_{\triangle BAB'}}\cdot\frac{S_{\triangle CAC}}{S_{\triangle CBC}}=1$,即 AA'、BB'、CC' 相交于一点 P.

8. **证明** 设正五边形边长为 a,正五边形对角线长相等,设为 b.

因四边形 $PBPA$ 是圆内接四边形,由托勒密定理,有 $PA\cdot b+PB\cdot b=PD\cdot a$.所以

$$PA\cdot b+PB\cdot b+PD\cdot b=PD\cdot a+PD\cdot b$$

有
$$PA+PB+PD=\frac{a+b}{b}PD. \quad ①$$

又由四边形 $PCDE$ 是圆内接四边形,有

$$PE+PC=PD\cdot\frac{b}{a}. \quad ②$$

而由四边形 $ABCE$ 为圆内接四边形,有 $a\cdot b+a^2=b^2$,即$\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}$.比较①,②得 $PA+PB+PD=PE+PC$.

9. **证明** 连结 AO 和 EF,由 A、E、O、F 四点共圆,有

$$OE\cdot AF+OF\cdot AE=EF\cdot OA,$$

即
$$OE\cdot AB+OF\cdot AC=R\cdot BC. \quad ①$$

同理
$$OF\cdot BC+OD\cdot AB=R\cdot AC, \quad ②$$
$$OD\cdot AC+OE\cdot BC=R\cdot AB. \quad ③$$

由①、②、③得

$$OD(AB+AC)+OE(BC+AB)+OF(AC+BC)=R(AB+BC+AC). \quad ④$$

又
$$OD\cdot BC+OE\cdot AC+OF\cdot AB=2S_{\triangle ABC}=r(AB+BC+AC). \quad ⑤$$

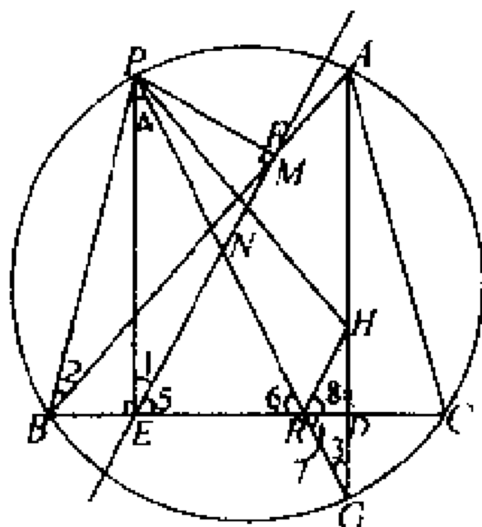
④+⑤,得

$$OD+OE+DF=R+r.$$

10. **证明** 根据垂心的性质易证 AB 垂直平分 DH,因而$\angle EHD=\angle EDH=\angle PBC$.连结 PB,因 B、P、X、Z 四点共圆,有$\angle PBX=\angle PZX$,所以$\angle EHD=\angle PZX$.又 $DH\perp AB$,$PZ\perp AB$,所以$\angle HEA=\angle XZA$,有 $EH/\!/ZXY$.

11. **证明** 设 PE 和 FG 交于 N，和 QG 交于 L. 由题设，图中 Q、F、G、C 和 E、L、G、C 和 C、E、D、P 分别四点共圆，所以有 $\angle EGQ=\angle FCQ$，$\angle NLQ=\angle GCE$，$\angle DEP=\angle DCP$. 有 $\angle FME=\angle MEN+\angle MNE=\angle DEP+\angle NGL+\angle NLC=\angle DCP+\angle FCQ+\angle RCB=\angle PCQ$.

12. **证明** 如图，过 P 作 $PE\perp BC$，$PF\perp AB$，E、F 为垂足，则 EF 即为$\triangle ABC$ 关于 P 点的西姆松线. 设 EF 交 PH 于 M，需要证明 $PM=MH$. 为此，延长 AH 交 BC 于 D，交$\triangle ABC$ 外接圆于 G，并连接 PG，交 EF 于 N，交 BC 于 R. 连接 RH，依题设，P、B、E、F 四点共圆，有$\angle 1=\angle 2$. 又$\angle 2=\angle 3$，而 $AG\,/\!/\,PE$，所以$\angle 3=\angle 4$，进而有$\angle 1=\angle 4$. 在 Rt$\triangle PER$ 中，$PN=NR$，且$\angle 5=\angle 6$. 注意到"三角形的垂心关于三边的对称点在三角形的外接圆上."可知 $HD=DG$，所以$\angle 7=\angle 8$. 又$\angle 6=\angle 7$，故$\angle 5=\angle 8$，$RH\,/\!/\,EF$，M 为 RH 中点.



(第 12 题)

13. **证明** 设$\triangle ABC$ 外心为 O，重心为 G，垂心为 H，则 O、G、H 共线. 因 $MN\,/\!/\,BC$，又 $OL\perp BC$，所以 $OL\perp MN$. 同理 $OM\perp LN$. 所以 O 为$\triangle LMN$ 的垂心. 又因$\triangle LMN$ 的重心就是$\triangle ABC$ 的重心 G，所以 OG 也为$\triangle LMN$ 的欧拉线. 故$\triangle LMN$ 的外心在 OG 上. 事实上过 MN 的中点 P 作 MN 的垂线交 OH 于 Q，Q 即为$\triangle LMN$ 的外心，此时 $OG:GQ=2:1$，所以 Q 为 OH 的中点.

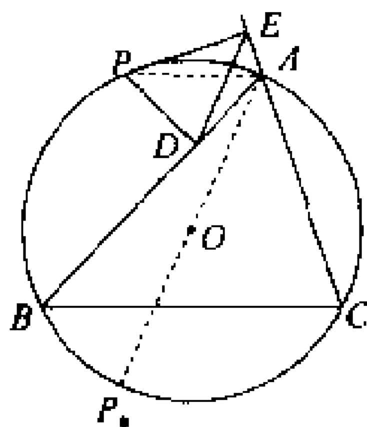
14. **证明** 易知 B'，C'，B，C 四点共圆，$\angle AC'B'=\angle ACB$，故$\triangle AC'B'\backsim\triangle ACB$，从而，$\frac{B'C'}{BC}=\frac{AB'}{AB}=\cos A$，$B'C'=BC\cos A=2R\sin A\cdot\cos A$.

由 A'、C'、A、C 四点共圆，有$\angle BA'C'=\angle A$. 同理$\angle B'A'C=\angle A$. 于是$\angle B'A'C'=180^\circ-2\angle A$. 设$\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径为 R'，则 $B'C'=2R'\sin(180^\circ-2\angle A)$，故 $2R\sin A\cos A=2R'\sin 2\angle A$，$R'=\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}$，由欧拉定理可得 $R'\geqslant 2P$，得 $P\leqslant\frac{R'}{2}=\frac{1}{4}$. 又 $R\geqslant 2r$，$0<r\leqslant\frac{1}{2}$，则 $1-\frac{1}{3}(1+r)^2\geqslant\frac{1}{4}$，于是 $P\leqslant\frac{1}{4}\leqslant 1-\frac{1}{3}(1+r)^2$.

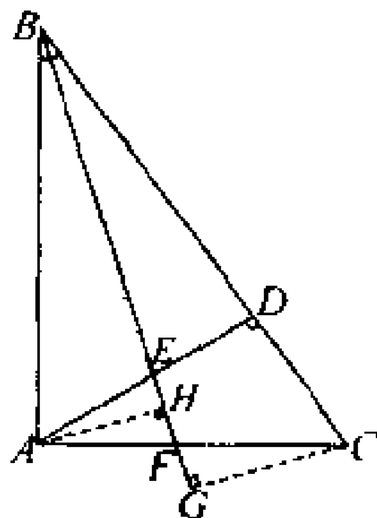
练习二十一

1. **证明** 如图所示，依题设易知 A、D、P、E 四点共圆. 连 AP，则 AP 作为

该圆直径. 所以, $DE = AP\cdot\sin A$, 作$\odot O$ 的直径 AP_0, 则 $AP \leqslant AP_0$. 故 $DE \leqslant AP_0\cdot\sin A = BC$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. **证明** 如图, 因$\angle AEF = \angle ABF + \angle BAE$, $\angle AFE = \angle CBF + \angle C$, 又$\angle ABF = \angle CBF$, $\angle BAE = \angle C$, 所以$\angle AEF = \angle AFE$, 即 $AE = AF$. 因在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $AD\perp BC$, $AC=\sqrt{2}$, 所以 $AC^2 = CD\cdot BC$, 即 $CD = \dfrac{2}{BC}$, 从而$\dfrac{EF}{CD} = \dfrac{1}{2}EF\cdot BC$. 作 $AH\perp EF$ 于 H, $CG\perp BF$ 于 G, 则因 $AE = AF$, 有 $HF = \dfrac{1}{2}EF$, 且易知$\angle HAF = \angle ABF = \angle GBC$, 所以 $\mathrm{Rt}\triangle AHF \backsim \mathrm{Rt}\triangle BGC$, 即有$\dfrac{HF}{GC} = \dfrac{AF}{BC}$, 故 $HF\cdot BC = AF\cdot GC < AF\cdot CF$. 所以$\dfrac{EF}{CD} = \dfrac{1}{2}EF\cdot BC = HF\cdot BC < AF\cdot CF$.

3. **证明** 设两正三角形各边的交点为 D、E、F、G、H、K, 显然$\triangle A'DK \backsim \triangle ADE \backsim \cdots \backsim \triangle CHK$, 又作 $OI\perp AC$ 于 I, $OJ\perp A'B'$ 于 J, 则因 $OI = OJ$, 故 $\mathrm{Rt}\triangle OID \cong \mathrm{Rt}\triangle OJD$, 有 $DI = DJ$. 从而, 有

$$A'D = AJ - DJ = \frac{1}{2}A'B' - DJ = \frac{1}{2}AC - DI = AD.$$

又$\triangle A'DK \backsim \triangle ADE$, 所以 $\mathrm{Rt}\triangle A'DK \cong \mathrm{Rt}\triangle ADE$.

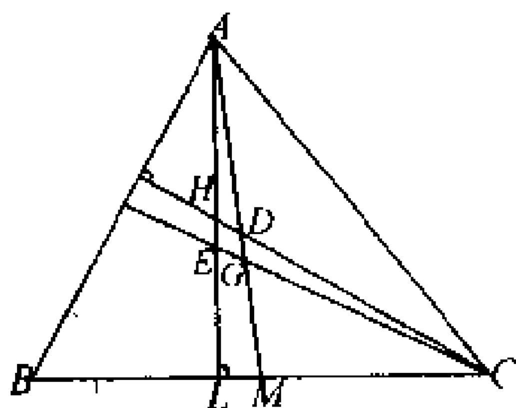
同理可证, 所有的这些相邻三角形都全等. 因而$\triangle ADE$ 的周长 $= AD + DE + EA = A'D + DE + EB' = A'B' = \sqrt{3}r$.

注意到 $S = S_{\triangle ABC} - 3S_{\triangle ADE}$, 所以当 $AD = DE = AE = \dfrac{\sqrt{3}}{3}r$ 时, $S_{\triangle ADE}$最大, 即 S 最小. $S \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}r)^2 - 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\dfrac{\sqrt{3}}{3}r)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r^2$, 即 $2S \geqslant \sqrt{3}r^2$.

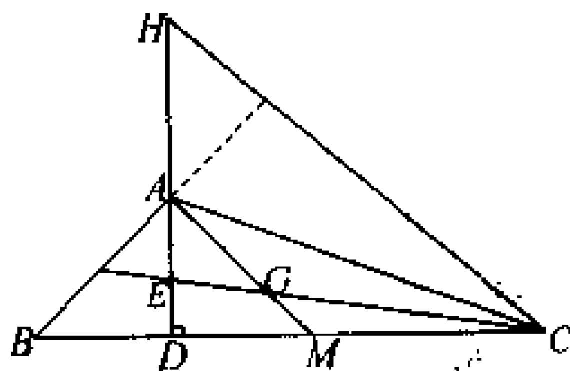
4. **证明** 先设$\triangle ABC$为锐角$\triangle$，如图(1)，易知角平分线在高AL与中线AM之间，并且$AC>AB$时，M在L与C之间，据此不妨设$BC>AC>AB$，则K应位于四边形$GDHE$中，显然，$\angle GDH>90°$，$\angle GEH>90°$，所以D、E均位于以GH为直径的圆内，从而K也在这圆内，$\angle GKH>90°$.

当$\triangle ABC$为钝(直)角三角形时，如图(2)所示，K在$\triangle AEG$内，更在$\triangle HEG$内，从而$\angle GKH>\angle GEH>90°$.

综上所述，命题获证.



(1)



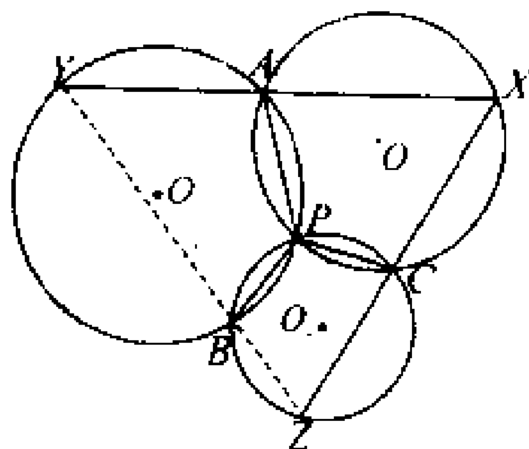
(2)

(第4题)

5. **证明** 如图，首先注意到Y,B,Z三点共线，这是因为连YB，ZB，有

$\angle PBY+\angle PBZ=\angle PAX+\angle PBZ=\angle PCZ+\angle PBZ=\pi$.

当点X在圆K_2，K_3外的圆弧$\overparen{AC}$上运动时，$\angle X$、$\angle Y$均保持不变.可见各个不同位置上的$\triangle XYZ$彼此相似.



(第5题)

欲使命题获证，只需考虑XY最大时的情形.设O_1、O_2在XY上射影H_1、H_2，则$XY=2H_1H_2\leqslant 2O_1O_2$，当且仅当$H_1H_2\parallel O_1O_2$，即$XY\parallel O_1O_2$时，$XY$取最大值，此时$S_{\triangle XYZ}=4S_{\triangle O_1O_2O_3}$，故有$S_{\triangle XYZ}\leqslant 4S_{\triangle O_1O_2O_3}$.

6. **证明** 由余弦定理及三角形面积公式，有

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S\\=&a^2+b^2+(a^2+b^2-2ab\cos C)-2\sqrt{3}ab\sin C\\=&2[a^2+b^2-2ab\sin(C+30°)]\end{aligned}$$

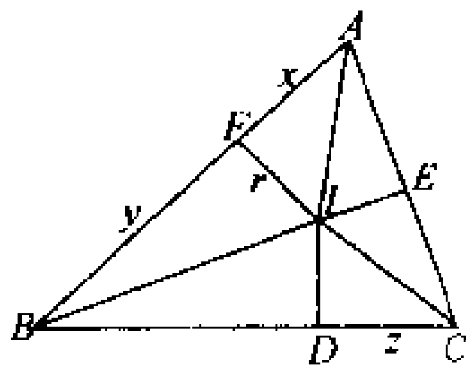
$$\geqslant 2(a^2+b^2-2ab)=2(a-b)^2\geqslant 0.$$

当且仅当 $a=b,c=60°$，即 $a=b=c$ 时等号成立.

7. **证明** 令 $a=y+x,b=z+x,c=x+y$，有

$$\begin{aligned}abc&=(y+z)(z+x)(x+y)\\&\geqslant 8\sqrt{yz}\sqrt{zx}\sqrt{xy}=8xyz\\&=8(p-a)(p-b)(p-c)\\&=(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\\&=a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc.\end{aligned}$$

8. **证明** 如图，设△ABC 的内切圆半径为 r，则 $\cot\frac{A}{2}=\frac{x}{r},\cot\frac{B}{2}=\frac{y}{r},\cot\frac{C}{2}=\frac{z}{r}$. 因而原不等式等价于



(第 8 题)

$$x^3+y^3+z^3\geqslant 9\sqrt{3}r^3.$$

令 $a=y+z,b=z+x,c=x+y$，则 $x=\frac{b+c-a}{2}=p-a,y=\frac{c+b-b}{2}=p-b,z=\frac{a+b-c}{2}=p-c$，

其中 $p=\frac{a+b+c}{2}$. 根据海伦公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

及 $S=pr$，有

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}},$$

故 $$9\sqrt{3}r^3=3\sqrt{\frac{27(xyz)^3}{(x+y+z)^3}}\leqslant 3\sqrt{\frac{27(xyz)^3}{27xyz}}=3xyz\leqslant x^3+y^3+z^3.$$

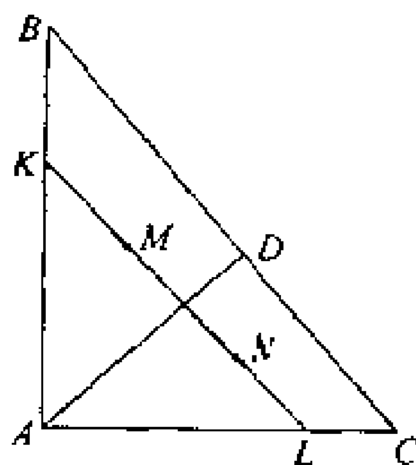
9. **证明** 设 $S_{\triangle DBK}=S_{\triangle KBM}=S_{\triangle MBE}=S_0$，则 $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_0}=\frac{AB\cdot TB}{DB\cdot KB},\frac{S_{\triangle TBP}}{S_0}=\frac{TB\cdot PB}{KB\cdot MB},\frac{S_{\triangle PBC}}{S_0}=\frac{PB\cdot CB}{MB\cdot EB}$. 所以

$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle ABC}}{S_0}&=\frac{S_{\triangle ABT}+S_{\triangle TBP}+S_{\triangle PBC}}{S_0}\\&\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{AB\cdot BT}{DB\cdot KB}\cdot\frac{TB\cdot BP}{KB\cdot BM}\cdot\frac{PB\cdot BC}{MB\cdot BE}}\\&=3\left(\frac{BT\cdot BP}{KB\cdot BM}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{AB\cdot BC}{DB\cdot BE}\right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$$= 3\left(\frac{S_{\triangle TBP}}{S_0}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{S_{\triangle ABC}}{3S_0}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

由此可得 $S_{\triangle ABC} \geqslant 3S_{\triangle TBP}$，即得 $AC \geqslant 3TP$.

10. **证明** 如图，将$\triangle ABD$和$\triangle ACD$的内心分别记为M、N. 由$\triangle ABD \backsim \triangle CAD$，并注意到$DM$、$DN$平分$\angle ADB$、$\angle ADC$，有$DM : DN = BD : AD$. 又因$\angle MDN = 90° = \angle ADB$，所以，有$\triangle ABD \backsim \triangle NMD$. 因此，$\triangle ABD$，$\triangle NMD$对应边的交角相等，有$\angle LKA = \angle BDM = 45°$.



（第10题）

这表明$\triangle ALK$为等腰直角三角形，又因$\triangle AMK \cong \triangle AMD$，所以，$AK = AD = AL$，于是，有

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC,$$

$$T = \frac{1}{2}AK \cdot AL = \frac{1}{2}AD^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{AB \cdot AC}{BC}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{AB^2 \cdot AC^2}{BC^2} = \frac{1}{2}\frac{AB^2 \cdot AC^2}{AB^2 + AC^2},$$

进而知 $$\frac{S}{2T} = \frac{AB^2 + AC^2}{2AB \cdot AC} \geqslant 1,$$

即 $S \geqslant 2T$.

11. **证明** 欲证 $S_1 \geqslant \frac{2}{3}S_2$，只须证明

$$S_{\triangle AGH} + S_{\triangle DBI} + S_{\triangle EFC} \leqslant \frac{S_2}{3}.$$

注意到平行四边形 $AGOH$、$BIOD$、$CEOF$，故又只需证明

$$S_{\triangle OIF} + S_{\triangle OEH} + S_{\triangle OGD} \geqslant \frac{S_2}{3}. \quad ①$$

设 $BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，$IF = x$，$EH = y$，$GD = z$，那么①式等价于

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geqslant \frac{1}{3}. \quad ③$$

依题设，有 $OE = CF$，从而$\frac{y}{b} = \frac{OE}{a} = \frac{CF}{a}$. 同理，$\frac{x}{c} = \frac{BI}{a}$. 所以，有

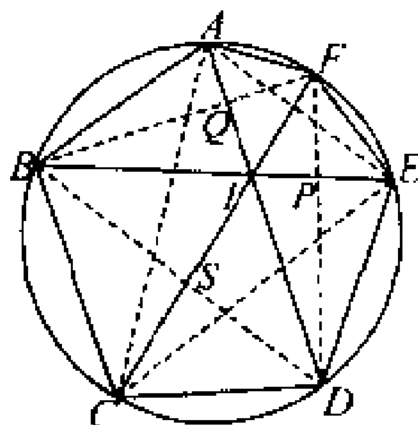
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{IF + CF + BI}{a} = 1, \quad ③$$

根据柯西不等式，由③得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{1}{3}.$$

故②式成立.命题即可获证.

12. 证明 (1) 如图,连接 AC、CE、EA.依题设知 AD、CF、BE 是$\triangle ACE$ 的三条内角平分线,I 为$\triangle ACE$ 的内心,故 AD、BE、CF 共点.



(第 12 题)

(2) 因$\angle DBE+\angle BDE=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BAF})=90°$,所以 $BE\perp DF$.设 BE、DF 交于 P,DA、BF 交于 Q,CF、BD 交于 S,则 BP、DQ、FS 是$\triangle BDF$ 的三条高,I 是它的垂心.根据艾尔多斯—莫德尔不等式,有

$$BI+DI+FI\geqslant 2(IP+IQ+IS).$$

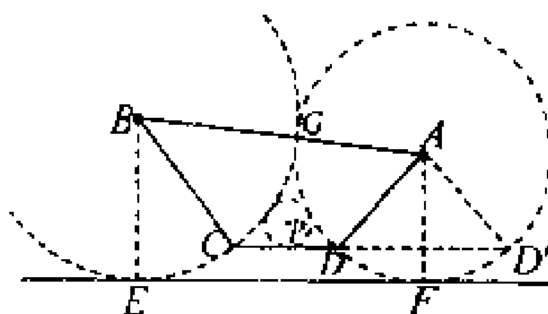
易知 $IE=2IP$,$IA=2IQ$,$IC=2IS$,故

$$BI+DI+FI\geqslant IA+IE+IC.$$

所以,有

$$\begin{aligned}&AB+BC+CD+DE+EF+FA\\=&2(BI+DI+FI)\\\geqslant&(IA+IE+IC)+(BI+DI+FI)\\=&AD+BE+CF.\end{aligned}$$

13. **证明** 分别以 A、B、P 为圆心,以 AD、BC、h 为半径作三个圆,则此三圆两两外切.设圆 A 和圆 B 的切点为 G,则圆 P 为曲边三角形 GCD(若给定的四边形为 $ABCD'$,则转而考察四边形 $ABCD$)的内切圆.作圆 A 与圆 B 的外公切线 EF(如图所示),容易看出,当 C、D 分别沿着所在的圆周移到 E、F 时,圆 P 的半径达到最大值,记为 m.即有 $m\geqslant h$.记 $AD=r$,$BC=R$.当圆 P 与 EF 相切时,考察 AB、BP、PA 在 EF 上的投影 p、a、b,有



(第 13 题)

$$p=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr},$$

$$a=\sqrt{(R+m)^2-(R-m)^2}=2\sqrt{Rm},$$

$$b=\sqrt{(r+m)^2-(r-m)^2}=2\sqrt{rm}.$$

于是有 $$\sqrt{Rr}=\sqrt{Rm}+\sqrt{rm},$$

即
$$\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}.$$
因为 $h\leqslant m$，故得
$$\frac{1}{\sqrt{h}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}.$$

练习二十二

1. **证明** 以 O 为原点建立复平面.设四边形 $ABCD$ 四顶点对应的复数分别用相应的小写字母表示.依题意有

$a'=ai, b'=bi, c'=ci, d'=di, p=\frac{1}{2}(b+ai), q=\frac{1}{2}(c+bi), r=\frac{1}{2}(ic+d), s=\frac{1}{2}(id+a).$

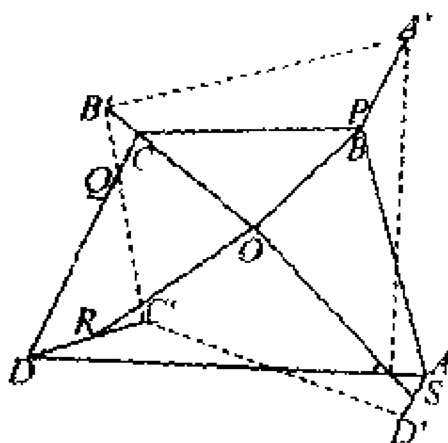
于是 $\overrightarrow{PR}$ 对应的复数为

$z_1=\frac{1}{2}(ic+d-ia-b)=\frac{1}{2}(d-b)+\frac{1}{2}(c-a)i$，$\overrightarrow{QS}$ 对应的复数为

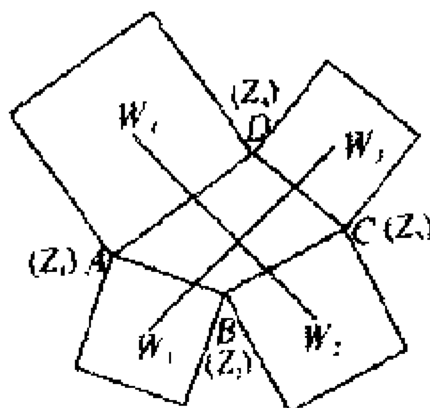
$z_2=\frac{1}{2}(id+a-ib-c)=\frac{1}{2}(a-c)+\frac{1}{2}(d-b)i.$

因 $z_1i=[\frac{1}{2}(d-b)-\frac{1}{2}(c-a)i]i=\frac{1}{2}(a-c)+\frac{1}{2}(d-b)i=z_2.$

故 $PR\perp QS$，且 $|PR|=|QS|$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. **证明** 如图，设四边形 $ABCD$ 的顶点按逆时针方向排列，A、B、C、D 对应的复数分别是 z_1、z_2、z_3、z_4.设各边向外做的正方形中心对应地是 W_1、W_2、W_3、W_4，且相应的复数是 w_1、w_2、w_3、w_4，则

$$w_1=\frac{1}{2}[(1+i)z_1+(1-i)z_2],$$

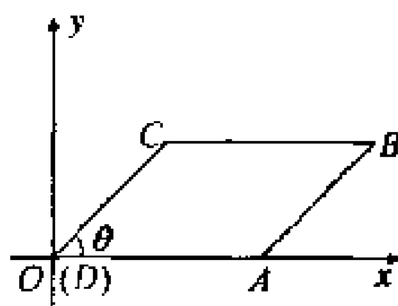
$$w_2=\frac{1}{2}[(1+i)z_2+(1-i)z_3],$$

$$w_3=\frac{1}{2}[(1+i)z_3+(1-i)z_4],$$

$$w_4=\frac{1}{2}[(1+i)z_4+(1-i)z_1].$$

又$(w_1-w_3)i=w_2-w_4$,故$|w_1-w_3|=|w_2-w_4|$,且$W_1W_3\perp W_2W_4$,命题获证.

3. **证明** 如图,建立复平面.设 A、C、D 对应复数为$r_1(>0)$、$r_2(\cos\theta+i\sin\theta)$,$(0^\circ<\theta<90^\circ)$,0.则 $B=r_1+r_2(\cos\theta+i\sin\theta)$,有



(第 3 题)

$$\begin{aligned}AC^2\cdot BD^2&=|r_1-r_2(\cos\theta+i\sin\theta)|^2\cdot\\&\quad|r_1+r_2(\cos\theta+i\sin\theta)|^2\\&=|r_1^2-r_2^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2|^2\\&=|r_1^2+r_2^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)|^2\\&=(r_1^2-r_2^2\cos2\theta)^2+(r_2^2\sin2\theta)^2\\&=r_1^4+r_2^4-2r_1^2r_2^2\cos2\theta.\end{aligned}$$

又 $AB^4+AD^4=r_1^4+r_2^4$.依题设,有 $\cos2\theta=0$,即得 $\theta=45^\circ$.

4. **证明** 建立复平面,则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{HM}$,而$\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{ET}$.从而$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ET}$,四边形 $ABTE$ 是平行四边形.

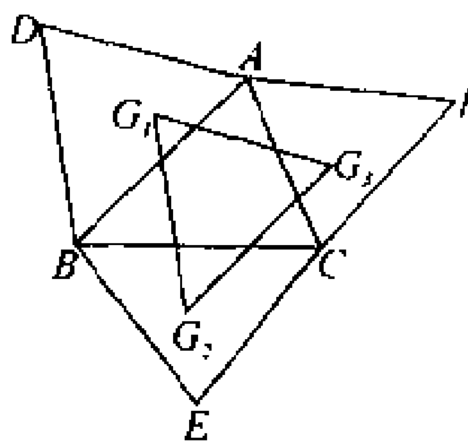
5. **证明** 建立复平面,并用字母表示相应复数.依题设,有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{A_2A_1}\\&=(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1B_2})+(\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{B_2A_1})\\&=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_2B_2}.\end{aligned}$$

同理 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{A_2C_2}$.

依题设,有$\frac{B_2-A_2}{C_2-A_2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$,$\frac{B_1-A_2}{C_1-A_1}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.于是$\frac{B-A}{C-A}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.即$|AB|=|AC|$,且$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$.故$\triangle ABC$为正三角形.

6. **证明** 建立复平面，并用字母表示相应的复数，如图.



（第 6 题）

$$D-B=(A-B)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

有 $$OD=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)A+\left(1-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)B.$$

$$G_1=\frac{1}{3}(A+B+D)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)A-\left(2-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)B\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)A+\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]B\right\}.$$

同理可得

$$G_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)B+\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]C\right\},$$

$$G_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)C+\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]A\right\},$$

$$G_1-G_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)A+B(-i)-\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]C\right\},$$

$$G_3-G_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]A-\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)B+Ci\right\}.$$

不难验证$\dfrac{G_1-G_2}{G_2-G_2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$. 故$\triangle G_1G_2G_3$为正三角形.

7. **证明** 建立复平面，并用字母表示对应复数. 不妨设 $B=-1, D=0, C=1, A=2\lambda i(\lambda>0)$，圆心 $O=\lambda i$. 可设 $F=1+e^{i\theta}$，其中 $\theta=2\angle CDF=2\angle COD$，有 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$. 于是 $F=\dfrac{2\lambda^2}{1+\lambda^2}+\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}i$，设线段 MF 的中点为 H，则 $H=\dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^2}+\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}i$. 易知 A、H、C 三点共线，进而即知命题成立.

8. **证明** 如图，建立复平面，不妨设第一个圆是单位圆，第二个圆的圆心位于 1 所应的点上. 设 $A=e^{i\theta}, B_1=1+e^{i\varphi}, \theta\in[0,2\pi), \varphi\in[0,\pi]$. 于是 $B_2=\overline{B_1}=1+e^{-i\varphi}$. 从而，有

$$AB_1^2=|1+e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2=(1+e^{-i\varphi}-e^{i\theta})(1+e^{i\varphi}-e^{-i\theta})$$

$$=3+(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})-(e^{i\varphi}e^{-i\theta}+e^{-i\varphi}e^{i\theta}). \qquad ①$$

同理 $$AB_2^2=3+(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})-(e^{i\varphi}e^{i\theta}+e^{-i\varphi}e^{-i\theta}). \qquad ②$$

①+②得

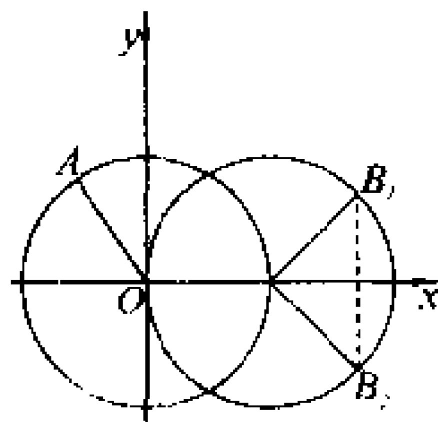
$$AB_1^2+AB_2^2=6+2(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})-2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})-(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$$

$$=6+4\cos\varphi-4\cos\theta-4\cos\varphi\cos\theta$$

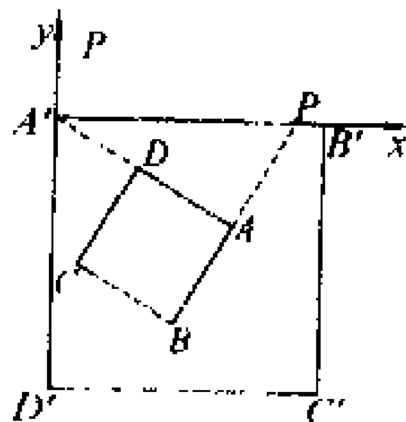
$$=2+4(1+\cos\varphi)(1-\cos\theta)$$

$$\geqslant 2.$$

等号当且仅当 $\varphi=\pi$ 或 $\theta=0$. 即点 A 位于第二个圆的中心,或 B_1 与 B_2 位于第一个圆中心时等号成立.



(第 8 题)



(第 9 题)

9. **证明** 如图,建立复平面,设 A 点对应的复数为 $z_1=|AA'|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $(\alpha=-\angle B'A'A)$, $\lambda=\frac{|AB|}{|A'B'|}$, $\angle\theta=-\angle B'PB$. 这样,构成变换 $\varphi(z)$,使 $A'B'C'D'$ 在此变换下分别变为 $ABCD$. $\varphi(z)=z_1+\lambda z(\cos\theta+i\sin\theta)$. 由 $z=z_1+\lambda z(\cos\theta+i\sin\theta)$,可得 $z=z_0=\frac{z_1}{1-\lambda(\cos\theta-i\sin\theta)}$. z_0 的对应点就是此变换中的惟一不动点. 故 $\varphi(z_0)=z_0$ 的对应点 Z_0 在大小地图上都代表着这个国家的同一个地方.

10. **证明** 设 P 在△ABC 所在平面上的射影为 Q,则 $PA\geqslant QA$, $PB\geqslant QB$, $PC\geqslant QC$. 故只须证明 $QA^2\cdot\sin A+QB^2\sin B+QC^2\sin C\geqslant 2S_{\triangle ABC}$①. 由正弦定理及三角形面积公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}$,知①式等价于 $a\cdot QA^2+b\cdot QB^2+c\cdot QC^2\geqslant abc$.

建立复平面,并设 A、B、C、Q 所对应的复数分别为 z_1、z_2、z_3、z,则有恒等式

$$(z_3-z_2)(z-z_1)^2+(z_1-z_3)(z-z_2)^2+(z_2-z_1)(z-z_3)^2$$

$=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)$.

事实上,上式左端为 z 的二次多项式,右端为常数,当 $z=z_1,z_2,z_3$ 时上式都成立.由题设知 $z_1\neq z_2\neq z_3$,而一元二次方程只有两个根,故上式只能是恒等式,于是

$$aQA^2+bQB^2+cQC^2$$

$$=|z_3-z_2||z-z_1|^2+|z_1-z_3||z-z_2|^2+|z_2-z_1||z-z_3|^2$$

$$\geqslant|(z_3-z_2)(z-z_1)^2+(z_1+z_3)(z-z_2)^2+(z_2-z_1)(z-z_3)^2|$$

$$=|z_1-z_2||z_2-z_3||z_3-z_1|=abc.$$

11. **解** 设⊙O 的半径为 R.建立复平面,设 $B_k=Re^{i\theta_k}(k=1,2,3\cdots n)$,则

$$\frac{2S}{R^2}=\sum_{k=1}^{n}\cdot\sum_{h=1}^{n}|e^{i\theta_k}-e^{i\theta_h}|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\cdot\sum_{h=1}^{n}[2-e^{i(\theta_k-\theta_h)}-e^{i(\theta_h-\theta_k)}]$$

$$=2n^2-\sum_{k=1}^{n}e^{i\theta_k}\sum_{h=1}^{n}e^{i(-\theta_h)}-\sum_{k=1}^{n}e^{i(-\theta_k)}\sum_{h=1}^{n}e^{i\theta_h}$$

$$=2n^2-2\left|\sum_{k=1}^{n}e^{i\theta_k}\right|^2\leqslant 2n^2.$$

所以 $S\leqslant n^2R^2$,当 $\sum_{k=1}^{n}e^{i\theta_k}=0$ 时取等号,最大值为 n^2R^2.

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□
□□=
□□=366
SS□=0
□□□□=
Vss□=54957415